

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Институт новых технологий и искусственного интеллекта
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:
И.о. директора института



Н. Л. Королева
«16» сентября 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине Б1.О.19 Линейная алгебра и геометрия

Направление подготовки/специальность: 01.03.01 - Математика

Профиль/направленность/специализация: Искусственный интеллект и моделирование

Уровень высшего образования: бакалавриат

Квалификация: Бакалавр

год набора: 2024

Автор программы:

Кандидат физико-математических наук, доцент Фомичева Юлия Геннадьевна

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 - Математика (уровень бакалавриата) (приказ Министерства образования и науки РФ от «10» января 2018 г. № 8).

Рабочая программа принята на заседании Кафедры функционального анализа «13» сентября 2024 г. Протокол № 2

Рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института новых технологий и искусственного интеллекта, Протокол от «16» сентября 2024 г. № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре ОП Бакалавриата.....	5
3. Объем и содержание дисциплины.....	6
4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства.....	16
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля).....	29
6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	31
7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	32

1. Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель дисциплины – формирование компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ПК-6 Способность находить, анализировать, реализовывать и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем

1.2 Типы задач профессиональной деятельности, к которым готовятся обучающиеся в рамках освоения дисциплины:

- научно-исследовательский
- педагогический

1.3 Дисциплина ориентирована на подготовку обучающихся к профессиональной деятельности в сферах: 01 Образование и наука (в сфере общего, профессионального и дополнительного профессионального образования; в сфере научных исследований), 40 Сквозные виды профессиональной деятельности в промышленности (в сфере научно-исследовательских и опытноконструкторских разработок)

1.4 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы:

Обобщенные трудовые функции / трудовые функции / трудовые или профессиональные действия (при наличии профстандарта)	Код и наименование компетенции ФГОС ВО, необходимой для формирования трудового или профессионального действия	Индикаторы достижения компетенций
	ПК-6 Способность находить, анализировать, реализовывать и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	Применяет приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач Проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач

1.5 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, обеспечивающих освоение компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения					
		Очная (семестр)					
		1	2	3	4	5	6

1	Аналитическая геометрия	+	+				
2	Введение в математический анализ	+	+	+			
3	Математический анализ				+	+	
4	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы)				+		
5	Основы высшей алгебры	+	+				
6	Теория чисел			+			
7	Функциональный анализ						+

ПК-6 Способность находить, анализировать, реализовывать и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения						
		Очная (семестр)						
		1	2	3	4	5	6	8
1	TensorFlow: продвинутый уровень			+				
2	Алгебраические структуры			+	+			
3	Дискретная математика		+					
4	Математика для анализа данных			+				
5	Математическая логика	+						
6	Математическая статистика					+		
7	Преддипломная практика							+
8	Разработка Web-приложений и Web-программирование						+	
9	Теория вероятностей			+				
10	Языки и методы программирования						+	

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата:

Дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» относится к обязательной части учебного плана ОП по направлению подготовки 01.03.01 - Математика.

Дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» изучается в 3, 4, 5 семестрах.

3.Объем и содержание дисциплины

3.1.Объем дисциплины: 12 з.е.

Очная: 12 з.е.

Вид учебной работы	Очная (всего часов)
Общая трудоёмкость дисциплины	432
Контактная работа	198
Лекции (Лекции)	92
Практические (Практ. раб.)	106
Самостоятельная работа (СР)	162
Экзамен	72
Зачет	-

3.2.Содержание курса:

№ темы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час.			Формы текущего контроля
		Лек ции	Пра кт. раб.	СР	
		О	О	О	
3 семестр					
1	Линейные пространства.	4	8	8	Выполнение практических заданий
2	Базис и размерность линейного пространства	8	8	12	Выполнение практических заданий; Контрольная работа
3	Подпространства линейных пространств.	8	4	12	Выполнение практических заданий
4	Сопряженное пространство.	8	4	8	Выполнение практических заданий; Контрольная работа; Зачет
5	Линейные отображения	4	8	4	Выполнение практических заданий; Опрос
4 семестр					
6	Линейные операторы	12	12	15	Выполнение практических заданий; Опрос
7	Идемпотентные операторы.	6	12	20	Выполнение практических заданий; Опрос; Контрольная работа

8	Собственные векторы и инвариантные подпространства.	4	12	17	Выполнение практических заданий; Опрос
9	Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора	4	4	12	Выполнение практических заданий; Контрольная работа
10	Комплексификация линейного оператора.	2	2	10	Опрос
5 семестр					
11	Билинейные и квадратичные формы.	8	8	12	Выполнение практических заданий; Опрос; Контрольная работа
12	Евклидовы и унитарные векторные пространства.	8	8	12	Выполнение практических заданий
13	Многомерные аффинные пространства	8	8	10	Выполнение практических заданий
14	Многомерные евклидовы пространства.	8	8	10	Выполнение практических заданий; Контрольная работа

Тема 1. Линейные пространства. (ОПК-1)

Лекция.

Понятие линейного пространства. Примеры. Простейшие свойства линейного пространства.

Понятие линейной зависимости векторов линейного пространства.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Понятие линейного пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № №1-13.
2. Решение задач по теме «Простейшие свойства линейного пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № №14-17.
3. Решение задач по теме «Понятие линейной зависимости векторов линейного пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № №18-36.

Задания для самостоятельной работы.

1. Доказать, что R^3 с операциями $+$ и $*$ является линейным пространством.
2. Решите векторное уравнение, удовлетворяющее дополнительным условиям.

3. Выяснить является ли линейным пространством конкретное множество чисел с определенной на нем операцией умножения чисел.
4. Выяснить, является ли множество рациональных чисел Q , с определенной на нем операцией умножения чисел, линейным пространством.
5. Выяснить линейную зависимость системы векторов.
6. Линейно независимую систему векторов дополните до базиса соответствующего линейного пространства.

Тема 2. Базис и размерность линейного пространства (ОПК-1)

Лекция.

Базис и координаты вектора. Переход от одного базиса к другому. Размерность линейного пространства.

Понятие изоморфизма линейных пространств.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Базис и координаты вектора. Переход от одного базиса к другому. Размерность линейного пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 37-63.
2. Решение задач по теме «Базис и координаты вектора. Переход от одного базиса к другому. Размерность линейного пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 64-80.

Задания для самостоятельной работы.

1. Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов является базисом в R^3 . Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты во втором базисе.
2. Выяснить линейную зависимость заданной системы векторов. Линейно независимую систему дополните до базиса соответствующего линейного пространства.
3. При каких значениях параметра из линейной независимости заданной системы векторов вытекает линейная независимость другой заданной системы векторов.
4. Найдите координаты заданного вектора пространства S над полем R в заданном базисе.
5. Выяснить изоморфны ли линейные заданные линейные пространства над полем R .
6. Для пространства решений следующей системы уравнений укажите какие-либо базисы.
7. Найдите координаты конкретного вектора из вещественного пространства многочленов степени степени не выше 3 в заданном базисе этого пространства.

Тема 3. Подпространства линейных пространств. (ОПК-1)

Лекция.

Понятие подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Размерность линейной оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о сумме размерностей пересечения и суммы подпространств. Разложение линейного пространства в прямую сумму пространств.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Понятие подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Размерность линейной оболочки» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 81-86; 94.
2. Решение задач по теме «Сумма и пересечение подпространств. Теорема о сумме размерностей пересечения и суммы» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 86-92; 95-99.

3. Решение задач по теме «Разложение линейного пространства в прямую сумму пространств» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 100-105.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Может ли образ (прообраз) нулевого элемента быть ненулевым элементом?
- 2 Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем вещественных чисел?
- 3 Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел?
- 4 Докажите, что множество, содержащее только нулевой элемент, является наименьшим подпространством среди всех подпространств вещественного линейного пространства (т.е. подпространством, содержащимся в любом другом подпространстве этого пространства).
- 5 Могут ли быть изоморфными линейное пространство и его подпространство, не совпадающее со всем пространством?
- 6 Докажите, что линейная оболочка не изменится, если в порождающей системе поменять местами какие-либо ее элементы.

Тема 4. Сопряженное пространство. (ОПК-1)

Лекция.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Дуальный базис.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Понятие подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Размерность линейной оболочки» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 106-112.

Задания для самостоятельной работы.

Докажите, что пространство многочленов над полем рациональных чисел не изоморфно своему сопряженному подпространству.

Тема 5. Линейные отображения (ПК-6)

Лекция.

Линейные отображения векторных пространств и их свойства. Обратимые линейные отображения. Изоморфизм. Матрица линейного отображения. Матричная запись линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения. Мономорфизм. Признак мономорфизма. Эпиморфизм. Признак эпиморфизма. Изоморфизм. Признак изоморфизма.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Линейные отображения векторных пространств и их свойства. Обратимые линейные отображения. Изоморфизм» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 113-116; 124, 125.

2. Решение задач по теме «Матрица линейного отображения. Матричная запись линейного отображения» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 117-123.

3. Решение задач по теме «Ядро и образ линейного отображения. Мономорфизм. Признак мономорфизма. Эпиморфизм. Признак эпиморфизма. Изоморфизм. Признак изоморфизма» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 126-140.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 В n -мерном линейном пространстве задан произвольный базис. Какой вид в этом базисе имеет матрица
 - а) нуль-оператора;
 - б) тождественного оператора;

в) оператора подобия?

2. Приведите пример линейных операторов A и B , для которых имеет место равенство $AB = BA$.

3. Является ли коммутатор двух линейных операторов линейным оператором?

4. Как выражается матрица коммутатора линейных операторов A и B через матрицы этих операторов?

5. Какой оператор является обратным

а) к оператору подобия;

б) к оператору поворота на заданный угол в двумерном векторном пространстве геометрических векторов?

Тема 6. Линейные операторы (ПК-6)

Лекция.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора в различных базисах. Действия над линейными операторами. Матрица суммы операторов, матрица произведения оператора на число, матрица композиции операторов. Свойства линейных операций над операторами. Композиция операторов. Свойства композиции операторов. Тожественный и нулевой операторы. Обратимый оператор. Условие обратимости линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Действия над линейными операторами. Матрица суммы операторов, матрица произведения оператора на число, матрица композиции операторов. Свойства линейных операций над операторами» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 141-147.

2. Решение задач по теме «Композиция операторов. Свойства композиции операторов. Тожественный и нулевой операторы » из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 148-153.

3. Решение задач по теме «Обратимый оператор. Условие обратимости линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 154,158, 160, 165.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Доказать, что любой линейный оператор переводит любую линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую систему векторов.
- 2 Найдите все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.
- 3 Докажите, что коммутатор двух линейных операторов не может быть тождественным преобразованием.

Тема 7. Идемпотентные операторы. (ПК-6)

Лекция.

Идемпотентные операторы. Определение, следствия из определения. Примеры идемпотентов. Теорема о задании идемпотента при помощи прямой суммы подпространств. Проектор. Сумма идемпотентов. Признак, когда сумма идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл суммы идемпотентов. Разность идемпотентов. Признак, когда разность идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл разности идемпотентов. Произведение идемпотентов. Условие, при котором произведение идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл произведения идемпотентов. Инволютивный оператор. Связь инволютивного оператора с идемпотентом.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Идемпотентные операторы. Определение, следствия из определения. Примеры идемпотентов. Теорема о задании идемпотента при помощи прямой суммы подпространств. Проектор» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 174-180.

2. Решение задач по теме «Сумма идемпотентов. Признак, когда сумма идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл суммы идемпотентов» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 183-185.

3. Решение задач по теме «Разность идемпотентов. Признак, когда разность идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл разности» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 186 (1-4).

Решение задач по теме «Разность идемпотентов. Признак, когда разность идемпотентов является идемпотентом. Геометрический смысл разности» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 181, 182, 187, 188

Задания для самостоятельной работы.

1. Сформулировать и доказать теорему, выражающую геометрический смысл суммы двух идемпотентов.
2. Сформулировать и доказать теорему, выражающую геометрический смысл разности двух идемпотентов.
3. Сформулировать и доказать теорему, выражающую геометрический произведения двух идемпотентов.
4. Сформулировать и доказать признак инволютивности оператора.

Тема 8. Собственные векторы и инвариантные подпространства.

(ПК-6)

Лекция.

Инвариантные подпространства. Примеры. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства и их связь с инвариантными подпространствами. Линейная независимость собственных векторов. Признак диагональной матрицы. Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение. Характеристические корни и их связь с собственными значениями линейного оператора. Кратность собственного значения. Спектр оператора. Простой спектр. Пример. Диагонализируемые операторы. Примеры диагонализируемых операторов. Теорема о существовании одномерных или двумерных инвариантных подпространств относительно линейного оператора в вещественном линейном пространстве. Операторы с простым спектром.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Инвариантные подпространства. Примеры. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства и их связь с инвариантными подпространствами. Линейная независимость собственных векторов. Признак диагональной матрицы» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 189-195.
2. Решение задач по теме «Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение. Характеристические корни и их связь с собственными значениями линейного оператора. Кратность собственного значения. Спектр оператора. Простой спектр.» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 196-204, 217-219.
3. Решение задач по теме «Диагонализируемые операторы. Примеры диагонализируемых операторов. Теорема о существовании одномерных или двумерных инвариантных подпространств относительно линейного оператора в вещественном линейном пространстве. Операторы с простым спектром» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 205- 216.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Доказать, что пересечение двух инвариантных подпространств линейного оператора является инвариантным подпространством.
- 2 Докажите, что линейный оператор, действующий в линейном пространстве R размерности n , не может иметь более n различных собственных значений.
- 3 Имеет ли собственные значения и собственные векторы:
 - а) нуль-оператор;
 - б) тождественный оператор;
 - в) оператор подобия?
4. Какие подпространства являются инвариантными относительно:
 - а) нуль-оператора;
 - б) тождественного оператора;
 - в) оператора подобия?
5. Справедливо ли утверждение: подпространство, состоящее из одного нулевого элемента, является инвариантным относительно любого линейного оператора?
6. Какой вид имеет матрица линейного оператора, если первые k базисных векторов являются его собственным подпространством?

Тема 9. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора (ПК-6)

Лекция.

Нильпотентные операторы. Теорема о собственных значениях нильпотента. Циклический оператор. Связь циклических операторов с нильпотентами. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств относительно нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Свойства корневых подпространств. Корневое разложение. Примеры. Жорданова клетка. Жорданова матрица. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора. Жорданов базис. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора и жорданова базиса. Примеры.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Нильпотентные операторы. Теорема о собственных значениях нильпотента. Циклический оператор. Связь циклических операторов с нильпотентами. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств относительно нильпотентного оператора» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 230-237.
2. Решение задач по теме «Корневые подпространства. Свойства корневых подпространств. Корневое разложение» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 220-223, 217-219.
3. Решение задач по теме «Жорданова клетка. Жорданова матрица. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора. Жорданов базис. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора и жорданова базиса» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 224- 229.

Задания для самостоятельной работы.

1. Оператор, действующий в вещественном линейном пространстве, задан матрицей A в некотором базисе этого пространства. Выяснить: 1) диагонализировать ли этот оператор? В случае положительного ответа найдите новый базис и соответствующий вид матрицы.
2) найдите корневое разложение линейного пространства относительно этого оператора.
3) приведите матрицу оператора к жордановой нормальной форме, найдите жорданов базис.
2. Доказать, что если линейный оператор A невырожденный, то любое подпространство, инвариантное относительно этого оператора, инвариантно и относительно оператора, обратного к A .

3. Пусть A - жорданова клетка порядка 4 с элементом a на главной диагонали. Найдите жорданову нормальную форму квадрата этой матрицы.
4. Линейный оператор называется полупростым, если для любого инвариантного подпространства имеется дополнительное инвариантное подпространство. Доказать, что любой линейный оператор можно единственным образом представить в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов.

Тема 10. Комплексификация линейного оператора. (ОПК-1)

Лекция.

Теорема Гамильтона-Кэли. Комплексификация линейного оператора. Комплексно-диагонализируемые операторы. Сопряженные операторы. Матрица сопряженного оператора в дуальном базисе.

Практическое занятие.

Практические занятия: не предусмотрены

Задания для самостоятельной работы.

1. Докажите утверждение: если оператор обратим, то и сопряженный к нему оператор тоже обратим. Найдите связь между матрицами обратных операторов.

Тема 11. Билинейные и квадратичные формы. (ПК-6)

Лекция.

Билинейные функционалы. Билинейные и квадратичные формы. Матрицы билинейной и квадратичной форм и их преобразование при переходе к новому базису. Ранги билинейной и квадратичной форм. Примеры. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Примеры. Нормальный вид квадратичной формы. Положительный, отрицательный индексы квадратичных форм. Сигнатура. Закон инерции квадратичных форм. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Якоби. Примеры. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Билинейные функционалы. Билинейные и квадратичные формы. Матрицы билинейной и квадратичной форм и их преобразование при переходе к новому базису. Ранги билинейной и квадратичной форм» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 238-246.
2. Решение задач по теме «Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 247-251.
- 1 3. Решение задач по теме «Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Якоби» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 252 (1-10).
- 1 4. Решение задач по теме «Нормальный вид квадратичной формы. Положительный, отрицательный индексы квадратичных форм. Сигнатура. Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 252-274.

Задания для самостоятельной работы.

1. Привести к нормальному виду и найти канонический базис данной квадратичной формы двумя способами: методом Лагранжа и методом Якоби. Выяснить, является ли форма положительно определенной. Найти ее сигнатуру и ранг.

2. Доказаать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все характеристические числа её матрицы положительны и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда они отрицательны.
3. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все коэффициенты характеристического многочлена её матрицы отличны от нуля и знаки этих коэффициентов чередуются, причём свободный член положителен.

Тема 12. Евклидовы и унитарные векторные пространства.

(ПК-6)

Лекция.

Положительно определенные эрмитовы функции в линейном пространстве. Ортогональные системы векторов. Примеры. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации базиса. Примеры. Ортогональные и унитарные матрицы. Евклидовы и унитарные пространства и их простейшие свойства. Ортогональное дополнение к подпространству унитарного пространства. Сопряженные операторы в унитарном пространстве. Свойства сопряженных операторов. Матрица сопряженного оператора. Нормальные операторы. Теоремы о собственных векторах нормального оператора. Унитарные операторы. Связь унитарных операторов с нормальными операторами. Ортогональные операторы. Признаки унитарности линейного оператора. Матрица унитарного оператора в ортонормальном базисе. Структура ортогонального линейного оператора в евклидовом пространстве. Симметрические (эрмитовы) операторы. Свойства симметрических операторов

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Эрмитовы функции в линейном пространстве. Процесс ортогонализации базиса» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 275-285.
2. Решение задач по теме «Евклидовы и унитарные пространства» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 286-306.

- 1 3. Решение задач по теме «Ортогональное дополнение к подпространству» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 307-352.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Доказать, что произведение двух ортогональных (унитарных) преобразований само ортогонально (унитарно).
- 2 Доказать, что в любом n - мерном евклидовом пространстве справедлива теорема косинусов.
- 3 Доказать, что конечная система попарно ортогональных ненулевых векторов линейно независима. Можно ли утверждать линейную независимость произвольной системы попарно ортогональных векторов?
- 4 Доказать, что линейное подпространство и его ортогональное дополнение в линейном пространстве R связаны следующим образом: коэффициентами линейно независимой системы уравнений, задающей одно из этих подпространств, служат координаты векторов базиса другого подпространства.

Тема 13. Многомерные аффинные пространства (ОПК-1)

Лекция.

Аффинное пространство и его свойства. Аффинная система координат. Плоскости в аффинном пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве A^n . Уравнение плоскости в пространстве A^n . Изоморфизм аффинных пространств. Аффинные преобразования аффинных пространств. Аналитическое задание аффинного преобразования.

Группа аффинных преобразований пространства A^n и ее подгруппы. Предмет аффинной геометрии.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Аффинное пространство и его свойства. Аффинные координаты. Переход к новой системе координат» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 353-366.
2. Решение задач по теме «Плоскости в аффинном пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 367-386.
3. Решение задач по теме «Аффинные преобразования аффинных пространств. Аналитическое задание аффинного преобразования» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 387-397.

Задания для самостоятельной работы.

1. В аффинном пространстве даны четыре различные точки Точки делят отрезки в одинаковом отношении Доказать, что:
 - а) если параллелограмм, то параллелограмм;
 - б) если то параллелограмм и , то и параллелограмм.
2. Доказать, что паре совравших точек в аффинном пространстве соответствует нулевой вектор.
3. Доказать, что любая плоскость, проходящая через точку , с направляющим подпространством , не зависит от выбора на ней точки.
4. Доказать, что любая аффинная плоскость в аффинном пространстве сама является аффинным пространством, размерность которого совпадает с размерностью этой плоскости.
5. Доказать, что через любые две различные точки аффинного пространства проходит единственная прямая.
6. Доказать, что через любые три точки аффинного пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная двумерная плоскость.
7. Выразить условие параллельности двух плоскостей мерного аффинного пространства, заданных общими уравнениями, с помощью понятия ранга матрицы.

Тема 14. Многомерные евклидовы пространства.

(ПК-6)

Лекция.

Евклидово n – мерное пространство. k – плоскости .Расстояние от точки до k – плоскости в пространстве E^n . Объем n -мерного параллелепипеда в E^n .

Движения пространства E^n . Группа подобий. Теоретико-групповая точка зрения на геометрию.

Квадрики в аффинном пространстве и их приведение к нормальному виду. Центр квадрики. Классификация квадрик в пространстве A^n . Квадрики в E^n . Пересечение прямой с гиперповерхностью второго порядка. Асимптотические направления. Сопряженные направления.

Практическое занятие.

1. Решение задач по теме «Движения пространства . Группа подобий» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 417-432.
2. Решение задач по теме «Квадрики в аффинном пространстве и их приведение к нормальному виду» из задачника О.П. Беляевой, Е.А. Панасенко, Ю.Г. Фомичевой «Вопросы и задачи по линейной алгебре и геометрии» № № 433-442.

Задания для самостоятельной работы.

1. Доказать, что квадрат ориентированного объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ n -мерного евклидова пространства, равен определителю Грама этих векторов.
2. Доказать, что квадрат диагонали прямоугольного n -мерного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины (n -мерное обобщение теоремы Пифагора).
3. Доказать теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма в n -мерном евклидовом пространстве равна сумме квадратов его сторон.
4. Найти число диагоналей n -мерного куба, ортогональных к этой диагонали.
5. Найти длину диагонали n -мерного куба с ребром длины a и предел этой длины при $n \rightarrow \infty$.
6. Доказать, что все диагонали n -мерного куба образуют один и тот же угол α со всеми его ребрами. Найдите этот угол и его предел при $n \rightarrow \infty$. При каком n получим $\alpha = 45^\circ$?
7. Найдите угол между диагональю n -мерного куба и его n -мерной гранью.
8. Доказать, что ортогональные проекции вершин n -мерного куба на любую его диагональ делят ее на равных частей.

4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства

4.1. Распределение баллов:

3 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 70 баллов
- контрольные срезы – 2 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ темы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Линейные пространства.	Выполнение практических заданий	15	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
2.	Базис и размерность линейного пространства	Выполнение практических заданий	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.

		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.
3.	Подпространства линейных пространств.	Выполнение практических заданий	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
4.	Сопряженное пространство.	Выполнение практических заданий	5	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.
		Зачет	20	10 задач по 2 балла за задачу
5.	Линейные отображения	Выполнение практических заданий	8	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике
		Опрос	2	Участие в устном опросе - 2 балла
6.	Посещаемость		10	10 баллов за регулярное выполнение заданий и отсутствие пропусков занятий без уважительных причин
7.	Премияльные баллы		20	Участие в студенческих олимпиадах – 10 баллов Участие в студенческих конференциях – 10 баллов
8.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы		50	Добор баллов: студент может предоставить все задания текущего контроля и задания контрольных срезов
9.	Итого за семестр		100	

4 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 40 баллов
- контрольные срезы – 2 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ те мы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Линейные операторы	Выполнение практических заданий	8	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Опрос	2	Участие в устном опросе - 2 балла
2.	Идемпотентные операторы.	Выполнение практических заданий	8	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике
		Опрос	2	Участие в устном опросе - 2 балла
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.
3.	Собственные векторы и инвариантные подпространства.	Выполнение практических заданий	8	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Опрос	2	Участие в устном опросе - 2 балла

4.	Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора	Выполнение практических заданий	5	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.
5.	Комплексификация линейного оператора.	Опрос	5	Участие в устном опросе - 5 баллов
6.	Посещаемость		10	10 баллов за регулярное выполнение всех заданий и отсутствие пропусков занятий без уважительной причины
7.	Премиальные баллы		20	Участие в студенческих олимпиадах – 10 баллов Участие в студенческих конференциях – 10 баллов
8.	Ответ на экзамене		30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
9.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы		50	Добор баллов: студент может предоставить все задания текущего контроля и задания контрольных срезов
10.	Итого за семестр		100	

5 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 40 баллов
- контрольные срезы – 2 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ темы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мак. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
--------	------------------------------------	---------------------------------	--------------------	--------------------------------------

1.	Билинейные и квадратичные формы.	Выполнение практических заданий	8	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Опрос	2	Участие в устном опросе - 2 балла
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.
2.	Евклидовы и унитарные векторные пространства.	Выполнение практических заданий	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
3.	Многомерные аффинные пространства	Выполнение практических заданий	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
4.	Многомерные евклидовы пространства.	Выполнение практических заданий	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	Самостоятельное выполнение заданий по индивидуальным билетам, содержащим 5 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла.

5.	Посещаемость	10	10 баллов за регулярное выполнение всех заданий и отсутствие пропусков занятий без уважительной причины
6.	Премиальные баллы	20	Участие в студенческих олимпиадах – 10 баллов Участие в студенческих конференциях – 10 баллов
7.	Ответ на экзамене	30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
8.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы	50	Добор баллов: студент может предоставить все задания текущего контроля и задания контрольных срезов
9.	Итого за семестр	100	

Итоговая оценка по экзамену выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной шкале. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

4.2 Типовые оценочные средства текущего контроля

Выполнение практических заданий

Тема 1. Линейные пространства.

Решение задач

Тема 2. Базис и размерность линейного пространства

Решение задач

Тема 3. Подпространства линейных пространств.

Решение задач

Тема 4. Сопряженное пространство.

Решение задач

Тема 5. Линейные отображения

Решение задач

Тема 6. Линейные операторы

Решение задач

Тема 7. Идемпотентные операторы.

Решение задач

Тема 8. Собственные векторы и инвариантные подпространства.

Решение задач

Тема 9. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора

Решение задач

Тема 11. Билинейные и квадратичные формы.

Решение задач

Тема 12. Евклидовы и унитарные векторные пространства.

Решение задач

Тема 13. Многомерные аффинные пространства

Решение задач

Тема 14. Многомерные евклидовы пространства.

Решение задач

Зачет

Тема 4. Сопряженное пространство.

зачетная работа

Контрольная работа

Тема 2. Базис и размерность линейного пространства

контрольная работа №1

Тема 4. Сопряженное пространство.

контрольная работа №2

Тема 7. Идемпотентные операторы.

контрольная работа №3

Тема 9. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора

контрольная работа №4

Тема 11. Билинейные и квадратичные формы.

контрольная работа №5

Тема 14. Многомерные евклидовы пространства.

контрольная работа №6

Опрос

Тема 5. Линейные отображения

- 1 1. Определение ядра и образа линейного отображения.
- 2 2. Что такое матрица линейного отображения и как ее найти?
- 3 3. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
- 4 4. Признак мономорфизма.

Признак эпиморфизма

Тема 6. Линейные операторы

1. Определение идемпотента.
2. Теорема о сумме идемпотентов.
3. Теорема о разности идемпотентов.
4. Теорема о произведении идемпотентов.
5. Можно ли найти образ вектора φ , зная, что он содержится в $\text{Im } \varphi$ при воздействии на него идемпотента φ , зная, что он содержится в $\text{Im } \varphi$?

Тема 7. Идемпотентные операторы.

1. Определение идемпотента.
2. Теорема о сумме идемпотентов.
3. Теорема о разности идемпотентов.
4. Теорема о произведении идемпотентов.
5. Можно ли найти образ вектора φ , зная, что он содержится в $\text{Im } \varphi$ при воздействии на него идемпотента φ , зная, что он содержится в $\text{Im } \varphi$?

Тема 8. Собственные векторы и инвариантные подпространства.

1. Определение собственного вектора и собственного значения.
2. Теорема о линейно независимых собственных векторах.
3. Признак диагонализруемости линейного оператора.
4. Определение инвариантного подпространства.
5. Теорема об инвариантном одномерном подпространстве.

Тема 10. Комплексификация линейного оператора.

Вопросы для устного опроса:

- 1 Сформулируйте понятие комплексификации вещественного линейного пространства.
- 2 Сформулируйте определение комплексификации линейного оператора.
- 3 Докажите, что комплексификация линейного оператора является линейным оператором.
- 4 Докажите, что любой базис вещественного линейного пространства является базисом его комплексификации.
- 5 Покажите, что матрица линейного оператора не меняется при его комплексификации.
- 6 Покажите, что характеристические корни линейного оператора являются характеристическими корнями и его комплексификации.
- 7 Объясните, почему спектр комплексифицированного оператора шире спектра исходного оператора.
- 8 Как связаны между собой собственные подпространства комплексифицированного оператора с комплексно-сопряженными собственными значениями и комплексификация собственного подпространства исходного линейного оператора?
- 9 Сформулируйте определение комплексно-диагонализируемого оператора.
- 10 Запишите какой блочно-диагональный вид имеет матрица комплексно-диагонализируемого линейного оператора, имеющего как вещественные, так и попарно комплексно сопряженные характеристические корни.

Тема 11. Билинейные и квадратичные формы.

1. Определение билинейной формы.
2. Когда билинейный функционал является симметрическим (признак симметричности).
3. Определение квадратичной формы.
4. Определение ранга квадратичной формы.
5. Теорема Лагранжа о каноническом виде квадратичной формы.
6. Написать нормальный вид квадратичной формы.
7. Определение отрицательного индекса квадратичной формы.
8. Теорема «Закон инерции квадратичных форм».
9. Формулы Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.
10. Определение отрицательно определенной квадратичной формы.
11. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета, экзамена

Типовые вопросы зачета (ПК-6, ОПК-1)

Типовые вопросы зачета

- 1 Линейное (векторное) пространство, его свойства.
- 2 Линейная зависимость векторов, ее свойства.
- 3 Базис линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Размерность линейного пространства.
- 4 Переход от одного базиса к другому.
- 5 Изоморфизм линейных пространств.
- 6 Подпространства линейного пространства.
- 7 Линейная оболочка системы векторов.
- 8 Сумма и пересечение подпространств.
- 9 Разложение линейного пространства в прямую сумму пространств.
- 10 Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Дуальный базис.
- 11 Определение и простейшие свойства линейных отображений. Матрица линейного отображения.
- 12 Ядро и образ линейного отображения.

Типовые задания для зачета (ПК-6, ОПК-1)

Практико-ориентированные задания по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия» для зачета

Вариант 1.

1. При каких значениях λ из линейной независимости системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ вытекает линейная независимость системы $\{(\lambda+1)\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + (\lambda+1)\vec{a}_2\}$.
2. Выяснить линейную зависимость системы векторов $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Линейно независимую систему дополните до базиса соответствующего линейного пространства.
3. Найдите координаты вектора $\vec{z} = 3 + 9i$ пространства \mathbb{C} над полем \mathbb{R} в базисе $\{2, -3i\}$.
4. Используя свойство сохранения ранга при изоморфном отображении, найдите ранг системы векторов $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в соответствующем пространстве.
5. Выяснить изоморфны ли линейные пространства V_1, V_2 над полем \mathbb{R} , если $V_1 = \{f(x) = a_1x + a_2x^3 + a_3x^5, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
6. Для пространства решений следующей системы уравнений укажите какие-либо базисы
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + \quad + x_4 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Выяснить, будет ли отображение φ линейного вещественного пространства в себя линейным, если для $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, x_1 - 1)$.

8. Пусть φ, ψ линейные преобразования R^2 ; φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе, ψ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе. Вычислить матрицу преобразования $\varphi\psi - 2\varphi + e$ в стандартном базисе.

9. Найдите матрицу линейного отображения $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ в стандартном базисе, если известно, что для $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_3 - 2x_2, 0, 0)$.

10. Линейное отображение $\varphi: M_2(R) \rightarrow M_2(R)$ каждой матрице $A \in M_2(R)$ сопоставляет матрицу $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу A_φ в стандартном базисе.

Типовые вопросы экзамена (ПК-6, ОПК-1)

Типовые вопросы экзамена

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора в различных базисах. Действия над линейными операторами.
2. Условие обратимости линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора.
3. Идемпотентные операторы и действия над ними. Инволютивный оператор.
4. Инвариантные подпространства. Собственные векторы линейного оператора.
5. Характеристический многочлен линейного оператора. Характеристические корни и характеристическое уравнение.
6. Диагонализируемые операторы. Спектр операторов. Оператор с простым спектром. Теорема о прямой сумме.
7. Нильпотентные и циклические операторы. Матрица циклического оператора.
8. Жорданова клетка. Жорданова матрица. Жорданов базис.
9. Корневые подпространства. Корневое разложение. Свойства корневых подпространств.
10. Теорема о Жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора. Алгоритм приведения произвольной матрицы к жордановой нормальной форме.
11. Теорема Гамильтона-Кэли. Аннулятор оператора.
12. Комплексификация линейного оператора.
13. Собственные подпространства, принадлежащие характеристическим корням. Комплексно-диагонализируемые операторы.
14. Сопряженный оператор и его матрица.

Типовые вопросы экзамена в 4 семестре

1. Билинейные функционалы. Билинейные и квадратичные формы. Примеры.
2. Матрицы билинейной и квадратичной форм и их преобразование при переходе к новому базису.
3. Ранги билинейной и квадратичной форм.

- 4 Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа.
- 5 Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм.
- 6 Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Якоби.
- 7 Положительно определенные квадратичные формы.
- 8 Критерий Сильвестра.
- 9 Положительно определенные эрмитовы функции в линейном пространстве.
- 10 Ортогонализация базиса.
- 11 Евклидовы и унитарные пространства и их простейшие свойства.
- 12 Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского.
- 13 Ортонормированный базис и его существование.
- 14 Ортогональное дополнение к подпространству унитарного пространства.
- 15 Сопряженные операторы в унитарном пространстве.
- 16 Нормальные операторы в унитарном пространстве.
- 17 Унитарные и симметричные операторы.
- 18 Структура ортогонального линейного оператора в евклидовом пространстве.
- 19 Аффинное пространство и его свойства.
- 20 Аффинная система координат.
- 21 Плоскости в аффинном пространстве.
- 22 Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве.
- 23 Уравнение плоскостей в аффинном пространстве.
- 24 Изоморфизм аффинных пространств.
- 25 Аффинные преобразования аффинных пространств.
- 26 Аналитическое задание аффинного преобразования.
- 27 Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Типовые задания для экзамена (ПК-6, ОПК-1)

Типовые задания для экзамена

1. Найдите корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства матрицей A .
2. Может ли матрица A служить матрицей перехода от базиса α к новому базису в пространстве V ? В случае положительного ответа, найдите новый базис и координаты вектора α в новом базисе.
3. Пусть U и V — подпространства линейного пространства V , где $U \cap V = \{0\}$. Найти проекции вектора α на каждое из подпространств U и V параллельно другому подпространству.
4. В некотором базисе α пространства V заданы своими координатами векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. В этом же базисе найдите матрицу линейного отображения A , переводящего векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в векторы β_1, \dots, β_n соответственно.
5. Найдите базисы и размерности U и V , где $U = \{x \in V \mid Ax = 0\}$ и $V = \{x \in V \mid Ax = b\}$.
6. Является ли диагонализируемым оператор A , имеющий в некотором базисе вещественного линейного пространства V матрицу A ? В случае положительного ответа найдите новый базис и соответствующую ему диагональную матрицу оператора A .

7. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного отображения T , заданного в некотором базисе B линейного пространства V матрицей $M_B(T)$.
Докажите, что подпространство, натянутое на векторы v_1 и v_2 инвариантно относительно T .
8. Линейное отображение T задано формулой $T(x) = 2x_1e_1 + 3x_2e_2 + x_3e_3$. Найдите матрицу $M_B(T)$, ядро, образ, ранг и дефект этого отображения в некотором базисе B пространства V . Докажите, что T является изоморфизмом пространства V на себя.
9. Докажите, что пространство комплексных чисел над полем \mathbb{C} изоморфно пространству матриц с вещественными элементами вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Укажите биекцию, сохраняющую операции.
10. Линейное отображение T имеет в некотором базисе пространства V матрицу $M_B(T)$. Является ли отображение T биекцией? Чему равен дефект этого отображения?
11. Привести к каноническому виду методом Лагранжа, найти ранг и сигнатуру квадратичной формы $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
12. Привести к каноническому виду методом Якоби следующую квадратичную форму $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ и найти канонический базис.
13. Привести к нормальному виду и найти канонический базис данной квадратичной формы методом Якоби. Выяснить, является ли форма положительно определенной. Найти ее сигнатуру и ранг.
14. В пространстве многочленов степени не выше 2 над полем вещественных чисел ортогонализировать базис $\{1, x, x^2\}$ относительно положительно определенной эрмитовой функции $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
15. В четырехмерном евклидовом пространстве подпространство W задано системой уравнений $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Найдите по одному ортогональному базису в подпространствах W и W^\perp .
16. Линейное преобразование T трехмерного евклидова пространства задано формулами: $T(x) = 2x_1e_1 + 3x_2e_2 + x_3e_3$, $T(x_2) = x_1e_1 + 2x_2e_2 + x_3e_3$, $T(x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + 2x_3e_3$, где $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортогональный базис этого пространства. Определите, является ли T ортогональным преобразованием?
17. Линейное преобразование T евклидова пространства в базисе B задано матрицей $M_B(T)$, где $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ – некоторый ортонормированный базис пространства. Найдите матрицу сопряженного преобразования T^* в базисе B .
18. В пространстве V найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора v относительно подпространства M , порожденного векторами v_1, v_2 .
19. Найдите ортонормированную фундаментальную систему решений для системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.
20. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A^3 , если известны старые координаты точки M и векторов v_1, v_2, v_3 .
21. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей в пространстве A^3 , если известно, что эти плоскости заданы системами уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.
22. Составить параметрические уравнения гиперплоскости Π в пространстве A^4 .

4.4. Шкала оценивания промежуточной аттестации

Зачет

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«зачтено» (50 - 100 баллов)	ПК-6	Умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Может проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач.
«не зачтено» (0 - 49 баллов)	ПК-6	Не умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Не умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Не может проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач.

Экзамен

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«отлично» (85 - 100 баллов)	ПК-6	Отлично умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Отлично умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Отлично умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
«хорошо» (70 - 84 баллов)	ПК-6	Хорошо умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Хорошо умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Хорошо умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
«удовлетворительно» (50 - 69 баллов)	ПК-6	Удовлетворительно умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Удовлетворительно умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Удовлетворительно умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
«неудовлетворительно» (менее 50 баллов)	ПК-6	Не умеет применять приемы алгоритмизации при математическом моделировании инженерных и научных задач
	ОПК-1	Не умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
		Не умеет проводить самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

5.1 Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся:

Приступая к изучению дисциплины, в первую очередь обучающимся необходимо ознакомиться содержанием рабочей программы дисциплины (РПД), которая определяет содержание, объем, а также порядок изучения и преподавания учебной дисциплины, ее раздела, части.

Для самостоятельной работы важное значение имеют разделы «Объем и содержание дисциплины», «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» и «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы».

В разделе «Объем и содержание дисциплины» указываются все разделы и темы изучаемой дисциплины, а также виды занятий и планируемый объем в академических часах.

В разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» указана рекомендуемая основная и дополнительная литература.

В разделе «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы» содержится перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, необходимых для освоения дисциплины.

5.2 Рекомендации обучающимся по работе с теоретическими материалами по дисциплине

При изучении и проработке теоретического материала необходимо:

- просмотреть еще раз презентацию лекции в системе MOODLe, повторить законспектированный на лекционном занятии материал и дополнить его с учетом рекомендованной дополнительной литературы;
- при самостоятельном изучении теоретической темы сделать конспект, используя рекомендованные в РПД источники, профессиональные базы данных и информационные справочные системы;
- ответить на вопросы для самостоятельной работы, по теме представленные в пункте 3.2 РПД.
- при подготовке к текущему контролю использовать материалы фонда оценочных средств (ФОС).

5.3 Рекомендации по работе с научной и учебной литературой

Работа с основной и дополнительной литературой является главной формой самостоятельной работы и необходима при подготовке к устному опросу на семинарских занятиях, к дебатам, тестированию, экзамену. Она включает проработку лекционного материала и рекомендованных источников и литературы по тематике лекций.

Конспект лекции должен содержать реферативную запись основных вопросов лекции, в том числе с опорой на размещенные в системе MOODLe презентации, основных источников и литературы по темам, выводы по каждому вопросу. Конспект может быть выполнен в рамках распечатки выдачи презентаций лекций или в отдельной тетради по предмету. Он должен быть аккуратным, хорошо читаемым, не содержать не относящуюся к теме информацию или рисунки.

Конспекты научной литературы при самостоятельной подготовке к занятиям должны содержать ответы на каждый поставленный в теме вопрос, иметь ссылку на источник информации с обязательным указанием автора, названия и года издания используемой научной литературы. Конспект может быть опорным (содержать лишь основные ключевые позиции), но при этом позволяющим дать полный ответ по вопросу, может быть подробным. Объем конспекта определяется самим студентом.

В процессе работы с основной и дополнительной литературой студент может:

- делать записи по ходу чтения в виде простого или развернутого плана (создавать перечень основных вопросов, рассмотренных в источнике);
- составлять тезисы (цитирование наиболее важных мест статьи или монографии, короткое изложение основных мыслей автора);
- готовить аннотации (краткое обобщение основных вопросов работы);
- создавать конспекты (развернутые тезисы).

5.4. Рекомендации по подготовке к отдельным заданиям текущего контроля

Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.

Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:

- правильность ответа по содержанию;
- полнота и глубина ответа;
- сознательность ответа;
- логика изложения материала;
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи;
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе;
- использование дополнительного материала;
- рациональность использования времени, отведенного на задание.

Устный опрос может сопровождаться презентацией, которая подготавливается по одному из вопросов практического занятия. При выступлении с презентацией необходимо обращать внимание на такие моменты как:

- содержание презентации: актуальность темы, полнота ее раскрытия, смысловое содержание, соответствие заявленной темы содержанию, соответствие методическим требованиям (цели, ссылки на ресурсы, соответствие содержания и литературы), практическая направленность, соответствие содержания заявленной форме, адекватность использования технических средств учебным задачам, последовательность и логичность презентуемого материала;
- оформление презентации: объем (оптимальное количество), дизайн (читаемость, наличие и соответствие графики и анимации, звуковое оформление, структурирование информации, соответствие заявленным требованиям), оригинальность оформления, эстетика, использование возможности программной среды, соответствие стандартам оформления;
- личностные качества: ораторские способности, соблюдение регламента, эмоциональность, умение ответить на вопросы, систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам программы;
- содержание выступления: логичность изложения материала, раскрытие темы, доступность изложения, эффективность применения средств ИКТ, способы и условия достижения результативности и эффективности для выполнения задач своей профессиональной или учебной деятельности, доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои заключения, выводы.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1 Основная литература:

1. Панасенко Е.А., Фомичева Ю.Г. Линейная алгебра и геометрия : Учеб. пособие. - Тамбов: Изд-во ТГУ, 2004. - 230 с.
2. Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре, I и II. Основы алгебры. Линейная алгебра и геометрия. - Москва: Физматлит, 2007. - 263 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82941>
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : Учеб. пособие для вузов. - 8-е изд.. - М., СПб.: Лаборатория Базовых Знаний, Невский Диалект, 2001. - 382 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра : учебник для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика". - 6-е изд., стер.. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 278 с.

6.2 Дополнительная литература:

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра : Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд., перераб.. - М.: Наука, 1986. - 399 с.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра. - Изд. 2-е, перераб. и доп.. - Москва: Наука, 1980. - 400 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450129>

3. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра : Учебник и практикум Для академического бакалавриата. - Москва: Юрайт, 2019. - 421 с. - Текст : электронный // ЭБС «ЮРАЙТ» [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/425852>
4. Кремер Н. Ш., Фридман М. Н., Тришин И. М. Линейная алгебра : Учебник и практикум для вузов. - испр. и доп; 3-е изд.. - Москва: Юрайт, 2020. - 422 с. - Текст : электронный // ЭБС «ЮРАЙТ» [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/450038>
5. Березина, Н. А. Линейная алгебра : учебное пособие. - 2020-08-31; Линейная алгебра. - Саратов: Научная книга, 2019. - 125 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/80988.html>
6. Лубягина Е. Н., Вечтомов Е. М. Линейная алгебра : Учебное пособие для вузов. - 2-е изд.. - Москва: Юрайт, 2020. - 150 с. - Текст : электронный // ЭБС «ЮРАЙТ» [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/456440>
7. Фролов, С. В. Линейная алгебра в геометрическом изложении : учебно-методическое пособие. - 2022-10-01; Линейная алгебра в геометрическом изложении. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2015. - 75 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/71490.html>
8. Просветов Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения : учеб.-практ. пособие. - 3-е изд., доп.. - М.: Альфа-Пресс, 2015. - 287 с.
9. Ремизов А. О., Шафаревич И. Р. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие. - Москва: Физматлит, 2009. - 512 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>
10. Розендорн Э. Р., Ефимов Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия. - 3-е изд.. - Москва: Физматлит, 2004. - 468 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75500>
11. Поддубная, М. Л., Свердлова, Е. Г. Линейная алгебра. Часть 1 : учебно-методическое пособие. - Весь срок охраны авторского права; Линейная алгебра. Часть 1. - Саратов: Вузовское образование, 2016. - 44 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/58325.html>
12. Богун, В. В. Проектная деятельность по математике. Линейная алгебра : учебное пособие для спо. - Весь срок охраны авторского права; Проектная деятельность по математике. Линейная алгебра. - Саратов: Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 80 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/92638.html>

6.3 Методические разработки:

1. Емельянова, Т. В., Кольчатова, А. М. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие. - Весь срок охраны авторского права; Линейная алгебра. Решение типовых задач. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. - 184 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/74559.html>

6.4 Иные источники:

1. Журнал «Успехи математических наук» - http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tmf&option_lang=rus
2. Общероссийский математический портал - <http://www.MathNet.Ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории и помещения для самостоятельной работы укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы укомплектованы компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

LibreOffice

Операционная система "Альт Образование"

Microsoft Windows 10

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru. – URL: <https://elibrary.ru>
2. Российская государственная библиотека: официальный сайт. – URL: <https://www.rsl.ru>
3. Университетская библиотека онлайн: электронно-библиотечная система. – URL: <https://biblioclub.ru>
4. Электронная библиотека РФФИ. – URL: <https://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>
5. Web of Science: политематическая реферативно-библиографическая и наукометрическая база данных . – URL: <https://apps.webofknowledge.com>
6. Scopus: база данных . – URL: <https://www.scopus.com>

Электронная информационно-образовательная среда

https://auth.tsutmb.ru/authorize?response_type=code&client_id=moodle&state=xyz

Взаимодействие преподавателя и студента в процессе обучения осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.