**Условия проведения второго этапа для участников Межрегиональной многопрофильной олимпиады школьников Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина Предмет «ИНФОРМАТИКА»**

**Цель конкурса**: дать возможность старшеклассникам проявить творческие способности, выявить среди участников тех, кто склонен к изучению дисциплин информационного профиля, способных мыслить логически, уметь решать нестандартные задачи.

**Задачи конкурса**: определить теоретические и практические знания старшеклассников по информатике; выявить умения и навыки самостоятельной работы и самоорганизации.

**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут). Работа состоит из 7 заданий. Задания можно выполнять в любом порядке. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения работы у Вас останется время, то вы можете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за все выполненные задания, суммируются. Всего за 2 этап Вы можете получить 50 баллов. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий, и набрать наибольшее количество баллов.

**Желаем успеха!**

## Типовой вариант заданий

**Задание 1 (5 баллов).** Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 6 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

1) $\mathbf{63_{10} * 4_{10}}$ 2) $\mathbf{F8_{16} + 1_{10}}$ 3) $\mathbf{333_8}$ 4) $\mathbf{11100111_2}$

**Решение:**

1) нужно перевести все заданные числа в двоичную систему, подсчитать число единиц и выбрать наибольшее из чисел, в которых ровно 6 единиц;

2) для первого варианта переведем оба сомножителя в двоичную систему:

   $63_{10} = 111111_2$ $4_{10} = 100_2$

   в первом числе ровно 6 единиц, умножение на второе добавляет в конец два нуля:

   $63_{10} * 4_{10} = 111111_2 * 100_2 = 11111100_2$

   то есть в этом числе 6 единиц
3) для второго варианта воспользуемся связью между шестнадцатеричной и двоичной системами счисления: каждую цифру шестнадцатеричного числа можно переводить отдельно в тетраду (4 двоичных цифры):

   $F_{16} = 1111_2$ $8_{16} = 1000_2$ $F8_{16} = 1111\ 1000_2$

   после добавления единицы $F8_{16} + 1 = 1111\ 1001_2$ также получаем число, содержащее ровно 6 единиц, но оно меньше, чем число в первом варианте ответа
4) для третьего варианта используем связь между восьмеричной и двоичной системами: каждую цифру восьмеричного числа переводим отдельно в триаду (группу из трёх) двоичных цифр:

   $333_8 = 011\ 011\ 011_2 = 11011011_2$

   это число тоже содержит 6 единиц, но меньше, чем число в первом варианте ответа
5) последнее число $11100111_2$ уже записано в двоичной системе, оно тоже содержит ровно 6 единиц, но меньше первого числа
6) таким образом, все 4 числа, указанные в вариантах ответов содержат ровно 6 единиц, но наибольшее из них – первое

**Ответ: 1.**

**Задание 2 (5 баллов).** Переведите шестнадцатеричное число $\mathbf{A_{16} = 13CE,D2}$ в десятичную систему счисления.

**Решение:**

13CE,D2 = $1*16^3 + 3*16^2 + 12*16^1 + 14*16^0 + 13*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 4096 + 768 + 192 + 14 + 0,8125 + 0,0078125 = 5070 + 0,8203125 = 5070,8203125.

**Ответ: 5070,8203125.**

**Задание 3 (8 баллов).** Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\mathbf{(x_1 \to (x_2 \wedge y_2)) \wedge (y_1 \to y_2) = 1}$$
$$\mathbf{(x_2 \to (x_3 \wedge y_3)) \wedge (y_2 \to y_3) = 1}$$
$$\mathbf{...}$$
$$\mathbf{(x_7 \to (x_8 \wedge y_8)) \wedge (y_7 \to y_8) = 1}$$

где $x_1, \ldots, x_8, y_1, \ldots, y_8$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение:**

1) перепишем систему уравнений в более понятном виде:
$(x_1 \to (x_2 \cdot y_2)) \cdot (y_1 \to y_2) = 1$
$(x_2 \to (x_3 \cdot y_3)) \cdot (y_2 \to y_3) = 1$
…
$(x_7 \to (x_8 \cdot y_8)) \cdot (y_7 \to y_8) = 1$
2) будем решать задачу методом битовых цепочек;
3) построим новую эквивалентную систему из двух уравнений, собрав в первое уравнение первые сомножители, входящие в каждое из исходных уравнений, а во второе уравнение – вторые сомножители:
$(x_1 \to (x_2 \cdot y_2)) \cdot (x_2 \to (x_3 \cdot y_3)) \cdot ... \cdot (x_7 \to (x_8 \cdot y_8)) = 1$
$(y_1 \to y_2) \cdot (y_2 \to y_3) \cdot ... \cdot (y_7 \to y_8) = 1$
4) из второго уравнение сразу следует, что в цепочке $Y = y_1 y_2 ... y_8$ запрещена комбинация 10, то есть все допустимые цепочки $Y$ имеют структуру «все нули, потом – все единицы»:
00000000 00000001 00000011 00000111
00001111 00011111 00111111 01111111 11111111
5) теперь рассмотрим первое уравнение, состоящее из сомножителей вида $x_i \to (x_{i+1} \cdot y_{i+1})$, каждый из которых должен быть равен 1;
6) если $y_{i+1} = 1$, то получаем условие $x_i \to (x_{i+1} \cdot y_{i+1}) = x_i \to x_{i+1} = 1$, то есть в цепочке $X$ запрещена комбинация 10
7) если $y_{i+1} = 0$, то получаем условие $x_i \to 0 = 1$, то есть сразу получаем, что $x_i = 0$
8) первому варианту цепочки $Y$ (00000000) соответствует первое уравнение вида
$(x_1 \to 0) \cdot (x_2 \to 0) \cdot ... \cdot (x_7 \to 0) = 1$,

которое даёт 2 подходящие цепочки *X*, в которых $x_1 = x_2 = ... = x_7 = 0$, а значение $x_8$ может быть любым (0 или 1)

9) для второго варианта цепочки *Y* (00000001) первое уравнение имеет вид
$(x_1 \to 0) \cdot (x_2 \to 0) \cdot ... \cdot (x_6 \to 0) \cdot (x_7 \to x_8) = 1$,
откуда получаем два уравнения:
$(x_1 \to 0) \cdot (x_2 \to 0) \cdot ... \cdot (x_6 \to 0) = 1$ и $(x_7 \to x_8) = 1$
первое из них однозначно определяет $x_1 = x_2 = ... = x_6 = 0$, а второе даёт 2 + 1 решений для цепочки из двух битом $(x_7, x_8)$ (для аналогичной цепочки из *n* битов будет $n+1$ решений)

10) для последних двух вариантов цепочки *Y* (01111111 и 11111111) получаем
$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot ... \cdot (x_6 \to x_7) \cdot (x_7 \to x_8) = 1$,
что даёт 9 решений

11) общее количество решений получаем, сложив количество подходящих цепочек *X* для каждого из решений *Y*: 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 2 · 9 = 53.

**Ответ: 53.**

**Задание 4 (8 баллов).** Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение **(50 < X*X) → (50 > (X+1)*(X+1))** истинно.

**Решение:**

1) это операция импликации между двумя отношениями
A = $(50 < X^2)$ и B = $(50 > (X+1)^2)$);
2) пусть A = $(50 < X^2)$ – истинно, тогда, с учетом того, что $X^2 > 0$, находим, что B = $(50 > (X+1)^2)$) – ложно, таким образом, импликация A → B ложна;
3) следовательно, импликация может быть истинной только при $X^2 <= 50$; поскольку в этом случае высказывание A ложно, то A → B = 0 → B = 1при любом B;
4) максимальное целое значение X, при котором $X^2 <= 50$, равно 7;

**Ответ: 7.**

**Задание 5 (5 баллов).** Определите, что будет напечатано в результате работы следующего фрагмента программы:

```
var k, s: integer;
begin
  k:=5;
  s:=2;
  while k < 120 do begin
    s:=s+k;
    k:=k+2;
  end;
  write(s);
end.
```

**Решение:**

1) начальные значения переменных **k** и **s** равны соответственно 5 и 2;

2) цикл заканчивается, когда нарушается условие **k < 120**, то есть количество шагов цикла определяется изменением переменной **k;**

3) после окончания цикла выводится значение переменной **s**;

4) с каждым шагом цикла значение **s** увеличивается на **k**, а затем значение **k** – на 2, так что к начальному значению **s** добавляется сумма членов арифметической прогрессии с начальным значением $a_1= 5$ и разностью d=2;

5) поскольку начальное значение **k** равно 5 и с каждым шагом оно увеличивается на 2, переменная **k** принимает последовательно нечётные значения: 5, 7, 9, …

6) цикл заканчивается, когда значение **k** становится не меньше 120; поскольку **k** всегда нечётное, конечное значение **k** равно 121;

7) поскольку значение **k** увеличивается после того, как увеличивается значение s, значение 121 уже не входит в сумму, то есть последний элемент последовательности:

$a_n=121-2=119$;

$S=2+a_1+a_2+\ldots a_n=2+5+7+9+\ldots+119$

8) количество членов последовательности, которые входят в сумму, можно вычислить: чтобы из 5 получить 119 нужно 57 раз добавить шаг 2, поэтому общее число элементов последовательности равно n=58 (на один больше);

9) теперь используем формулу для вычисления суммы членов арифметической прогрессии:

$$S_n = 5+7+9+\ldots+119 = \frac{5+119}{2}\cdot 58 = 62\cdot 58 = 3596$$

10) к этой сумме нужно добавить начальное значение переменной **s**, равное 2: S=2+3596=3598.

**Ответ: 3598.**

**Задание 6 (5 баллов).** Сколько единиц в двоичной записи числа

$$\mathbf{4^{2016} + 2^{2018} – 8^{600} + 6}$$

**Решение:**

1) приведём все числа к степеням двойки, разложив 6 как $2^2+2^1$

$4^{2016} + 2^{2018} – 8^{600} + 6 = (2^2)^{2016} + 2^{2018} - (2^3)^{600} + 2^2 + 2^1 = 2^{4032} + 2^{2018} – 2^{1800} + 2^2 + 2^1$

2) число $2^N$-1 в двоичной системе записывается как $N$ единиц: $2^N - 1 = \underbrace{1\ldots1}_{N}$,

   а число $2^N – 2^K$ при $K < N$ записывается как $N–K$ единиц и $K$ нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$
3) согласно п. 2, число $2^{2018} – 2^{1800}$ запишется как 218 единиц и 1800 нулей
4) прибавление $2^{4032}$ даст ещё одну единицу, а прибавление $2^2 + 2^1$ – ещё две, всего получается 218 + 3 = 221 единица

**Ответ: 221.**

**Задание 7 (5 баллов).** Запись числа $67_{10}$ в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание этой системы счисления N.

**Решение:**

1) поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1, то есть при некотором целом $k$ имеем

$$k \cdot N + 1 = 67 \;\Rightarrow\; k \cdot N = 66$$

2) следовательно, основание N – это делитель числа 66;
3) с другой стороны, запись числа содержит 4 цифры, то есть $1000_N \le 67 < 10000_N \quad\Rightarrow\quad N^3 \le 67 < N^4$
4) выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел, которые являются делителями числа 66:

$2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 6^3 = 216,...$

$2^4 = 16,\ 3^4 = 81,...$

5) из этого списка только для числа N = 3 выполняется условие $N^3 \le 67 < N^4$;
6) таким образом, верный ответ – 3;
7) можно сделать проверку, переведя число 67 в троичную систему $\mathbf{67_{10} = 2111_3}$

**Ответ: 7.**

**Задание 8 (6 баллов).** Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

**F(1) = 1**

**F(n) = F(n–1) * n, при n > 1**

Чему равно значение функции F(5)?

В ответе запишите только целое число.

**Решение:**

1) используя заданную рекуррентную формулу, находим, что
F(5) = F(4) * 5
2) применив формулу еще несколько раз, получаем
F(5) = F(3) * 4 * 5 = F(2) * 3 * 4 * 5 = F(1) * 2 * 3 * 4 * 5
3) мы дошли до базового случая, который останавливает рекурсию, так как определяет значение F(1) = 1
4) окончательно F(5) = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120

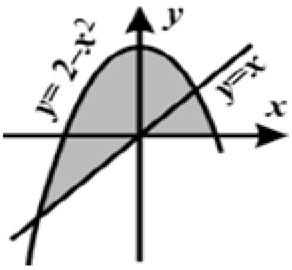
**Ответ: 120**.

**Задание 9 (6 баллов).** Что делает следующий фрагмент программы?

```
Function d (x: real; n: integer): real;
 begin
    if n=0
      then d:=1
      else
          if n<0
          then d:=1/d(x,-n)
          else d:=d(x,n-1)*x
end.
```

**Ответ**: в данном фрагменте программы вычисляется $\mathbf{X^n}$ .

**Задание 10 (10 баллов).**




Написать программу, которая вводит с клавиатуры координаты точки на плоскости (**x**, **y** – действительные числа) и определяет принадлежность точки заштрихованной области, включая ее границы.

**Решение:**

1) необходимо составить одно сложное условие, описывающее всю заштрихованную область;
2) объединение областей выполняется с помощью операций **И** (and) и **ИЛИ** (**or**), поэтому полное условие принимает вид

   **(y>=0) and (y <=2-x*x) or (y>=x) and (y <=2-x*x)**
3) поскольку в обоих условиях есть условие **y <=2-x*x**, запись можно сократить:

   **(y <=2-x*x) and ((y>=x) or (y>=0))**
4) программа на языке Pascal:

```
var x,y: real;
begin
readln(x,y);
if (y <=2-x*x) and ((y>=x) or (y>=0)) then
  write('принадлежит')
else
  write('не принадлежит')
end.
```

**Задание 11 (10 баллов).** Дан целочисленный квадратный массив 10 x 10. Опишите на русском языке или на одном из языков программирования алгоритм вычисления суммы максимальных элементов из каждой строки. Напечатать значение этой суммы. Предполагается, что в каждой строке такой элемент единственный.

**Решение:**

1) суть задачи: среди элементов каждой строки нужно выбрать максимальный, и все эти выбранные значения сложить;
2) программа на языке Pascal:

```
const N=10;
var A: array[1..N,1..N] of integer;
   i, k, max, Sum: integer;
begin
{ ввод матрицы N на N }
Sum := 0;
for i:=1 to N do begin
{За максимальный элемент в строке вводится переменная max, в которую  сначала записывается значение первого элемента этой строки}
  max := A[i,1];
{В цикле просматриваются все элементы, начиная со второго и до конца массива. Если очередной элемент больше значения max, записываем в max  значение этого элемента}
for k:=2 to N do
   if A[i,k] > max then max := A[i,k];
   Sum := Sum + max; {Для каждой строки находится максимальный элемент и прибавляется его значение к Sum.}
end;
writeln(Sum);
end.
```

## Рекомендуемая литература


1. Абрамян М.Э., Михалкович С.С., Русанова Я.М., Чердынцева М.И. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
2. Ахо А.А., Хопкрофт Д.Э., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Вильямс, 2010. 400 с.

3. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
4. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2017 гг.
5. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ-2010. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / под ред. В.Р. Лещинера / ФИПИ. — М.: Интеллект-центр, 2010.
6. Лебедев А.Б. Сборник задач по алгоритмизации и программированию для подготовки к ЕГЭ (с решениями). – М.: Феникс, 2010. 448 с.
7. Русаков С.В. Олимпиады по базовому курсу информатики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 352 с.
8. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. Информатика: тренировочные задания. – М.: Эксмо, 2009.
9. Скиена С.С. Алгоритмы. Руководство по разработке. Изд. 2-е. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 720 с.
10. Левитин А.В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ. – М.: Вильямс, 2006. 576 с.
11. Ярославские олимпиады по информатике. Сборник задач с решениями. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 408 с.
12. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.