Номинация «Математика»

Максимальная сумма баллов за задания – 100.

Задания олимпиады разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Задачи для математической олимпиады подбираются таким образом, чтобы для их решения не требовалось специальных знаний, выходящих за рамки стандартного школьного курса.

Комплект олимпиадных заданий формируется из четырех параллельных вариантов заданий. Варианты заданий каждого комплекта содержат одинаковое как общее количество заданий, так и количество заданий одинаковой сложности.

Каждый вариант содержит три типа задач: задачи первого, второго и третьего уровней сложности. Задачи первого уровня сложности нацелены на выявление базовых теоретических знаний, навыков владения терминологией, понятийным аппаратом и стандартными алгоритмами. Задачи второго уровня сложности позволяют выявить комплексные интеллектуальные математические умения, т.е. умения применять знания нескольких разделов школьной программы по математике для решения конкретных задач. Задачи третьего уровня сложности направлены на выявление общей эрудиции, степени ориентированности в теоретическом материале, логики мышления, способности анализировать ситуацию и находить подходы и верный путь решения в нестандартных ситуациях.

Варианты олимпиадных заданий по своему содержанию носят сбалансированный характер, охватывая все ключевые, наиболее важные элементы программного учебного материала по математике. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень. Они позволяют установить уровень усвоения выпускниками федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, а также позволяют проявить творческий потенциал, способность к самостоятельному мышлению, необходимые для успешного усвоения университетской программы по математике.

Объем работы

Каждый вариант состоит из 10 заданий: 4 задания первого уровня сложности; 4 задания второго уровня и 2 задания третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное, обоснованное решение задачи. Порядок выполнения заданий не важен. Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

Необходимые для пояснения решения **чертежи и рисунки выполняются от руки.**

Все вычисления проводятся вручную, **без использования калькулятора.**

Примерная тематика работы:

Задачи первого уровня сложности требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения участнику олимпиады нужно уметь производить простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть:

- текстовые задачи (задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения, задачи по теории вероятностей);
- задачи на прогрессии;
- тригонометрические уравнения или системы уравнений, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений;
- рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения и их системы;
- задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе простейшие задачи по планиметрии и стереометрии.

Задачи второго уровня сложности содержат

- рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы;
- задачи, связанные с исследование функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных функций: находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

Задачи третьего уровня сложности включают

- задания по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов площадей), поверяющие знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения;

- задачи на использование производной, которые проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с векторами и координатами);
- задачи, требующие умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметром при наличии ограничений на неизвестные. Умение решать подобные задачи показывает уровень логического мышления конкурсанта, его способность находить выход из нестандартной ситуации;
- задачи по стереометрии, для решения которых необходимо владеть методикой построения геометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Умение решать такие задачи показывает уровень развития пространственного воображения конкурсанта.

Примеры и конкретные характеристики задач и вариантов заданий олимпиады по математике приведены ниже.

Образец варианта

№1.*Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если ст реляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристре лянного револьвера,то он попадает в муху с вероятностью 0,2.*
На столе лежат 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон про махнётся.

Решение:
Ковбой может взять пристрелянный револьвер со стола с вероятностью $\frac{4}{10} = 0{,}4$ и промахнется из него с вероятностью $0{,}1$.
Ковбой может взять не пристрелянный револьвер со стола с вероятностью $\frac{6}{10} = 0{,}6$ и промахнется из него с вероятностью $0{,}8$.
Тогда искомая вероятность будет равна $p = 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}52$.
Ответ 0,52.

№2.*23 февраля в магазине «Все для мужчин» действует 20% скидка на одежду , 30% – на обувь и 40% –на аксессуары.*
При этом купить со скидкой можно не более двух товаров.
Иван Иванович хочет приобрести рубашку по цене 1800 руб., туфли за 3600 руб. и запонки за 1000 рублей.

В каком случае Иван Иванович заплатит за свою покупку меньше всего:
1) если купит со скидкой рубашку и запонки, а туфли – без скидки;
2) если купит со скидкой рубашку и туфли, а запонки – без скидки;
3) если купит со скидкой туфли и запонки, а рубашку – без скидки?
В ответ запишите, сколько рублей заплатит Иван Иванович за покупку в этом случае.

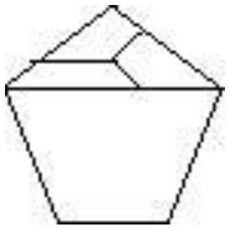
Решение:
Разберем все три варианта и сравним в итоге полученную общую стоимость покупок.

1) Если купит со скидкой рубашку и запонки, а туфли – без скидки, то общая стоимость будет вычисляться таким образом:
$$1800 \cdot 0{,}8 + 1000 \cdot 0{,}6 + 3600 = 5640 \text{ рублей.}$$
2) Если купит со скидкой рубашку и туфли, а запонки – без скидки, общая стоимость будет вычисляться таким образом:
$$1800 \cdot 0{,}8 + 3600 \cdot 0{,}7 + 1000 = 4960 \text{ рублей.}$$
3) Если купит со скидкой туфли и запонки, а рубашку – без скидки, общая стоимость будет вычисляться таким образом:
$$3600 \cdot 0{,}7 + 100 \cdot 0{,}6 + 1800 = 4920 \text{ рублей.}$$

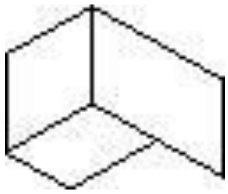
Сравнив итоговую стоимость покупок во всех трех вариантах, видим, что меньше всего Иван Иванович заплатит в третьем случае.
Ответ: 4920.

№ 3. *а) Можно ли правильный пятиугольник разрезать на параллелограммы?*
б) Можно ли правильный пятиугольник разрезать на трапеции?
в) Найдите наименьшее нечётное n, для которого существует $n-$угольник, который можно разрезать на параллелограммы.

Решение.
а) Нет.
Пусть разбиение правильного пятиугольника на параллелограммы возможно. Рассмотрим параллелограммы, примыкающие к некоторой стороне. Противоположная сторона каждого из них параллельна стороне пятиугольника. Двигаясь по параллелограммам со стороной, параллельной этой стороне пятиугольника, мы дойдем до другой стороны пятиугольника, т.е. для каждой стороны есть параллельная ей. Так как у выпуклого многоугольника может быть еще только одна сторона, параллельная данной, то все разветвления цепочки упираются в одну и ту же сторону. Поэтому все стороны многоугольника разобьются на пары параллельных сторон. Но для выпуклого многоугольника с нечётным числом сторон это невозможно. Противоречие.
б) Да.
Пример такого разбиения на рисунке.



в) Из выводов пункта а) следует, что искомый многоугольник не может быть выпуклым, поэтому треугольник нельзя разрезать на параллелограммы. Докажем, что это невозможно и для пятиугольника. Как в пункте а), двигаясь по параллелограммам со стороной, параллельной некоторой стороне пятиугольника, мы дойдем до другой стороны пятиугольника, т.е. для каждой стороны есть параллельная ей. Значит, стороны пятиугольника можно разбить на группы параллельных сторон, причем в каждой группе не менее 2-х представителей. Можно представить в таком виде единственным способом 3+2. Следовательно, есть 3 различных параллельных стороны и количество вершин не меньше 6. Противоречие.
На следующем рисунке пример невыпуклого 7-угольника.



№4. *Решите уравнение*: $cos(x^2+x)+cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

Решение

Заметим, что
$cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=2cos(x+\pi)cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=cos(x+\pi).$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$cos(x^2+x)+\ cos(x+\pi)=0.$$

Отсюда, преобразовав сумму косинусов в их произведение, придем к уравнению:

$2cos\frac{x^2+2x+\pi}{2}cos\frac{x^2-\pi}{2}=0.$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} cos\frac{x^2+2x+\pi}{2}=0 \\ cos\frac{x^2-\pi}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2+2x+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n \\ \frac{x^2-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-2\pi n=0 \\ x^2=2\pi+2\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{1+2\pi n} \\ x=\pm\sqrt{2\pi m} \end{array}\right. ,n=0,1,2\dots;\ m=0,1,\dots.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{1+2\pi n} \\ x=\pm\sqrt{2\pi m} \end{array}\right. ,n=0,1,2\dots;\ m=0,1,\dots.$

№5. *Найдите максимальную длину промежутка, на котором функция* $f(x) = x^2 e^x$ *убывает.*

Решение:
Функция убывает, если производная этой функций отрицательна.
Найдем производную функции $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ и определим промежуток, на котором она отрицательна.
Решим неравенство $2xe^x + x^2e^x < 0$. Так как $e^x > 0$ при любых значениях x, то неравенство равносильно $2x + x^2 < 0$. Оно дает нам решение в виде: $-2 < x < 0$. Максимальная длина промежутка, на котором функция убывает, равна 2.
Ответ 2.

№6.*Докажите, что при любых x, y, z, t выражение* $f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt$ *неотрицательно. Выяснить все случаи, когда оно равно нулю.*

Решение

Представим данный многочлен в виде суммы неотрицательных слагаемых следующими способами:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt = (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - t^2)^2 + 2(xy - zt)^2 > 0,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt = (x^2 - z^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + 2(xz - yt)^2 > 0,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt = (x^2 - t^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + 2(xt - yz)^2 > 0.$$

Равенство выполняется только если

$$x^2 - y^2 = z^2 - t^2 = x^2 - z^2 = xy - zt = 0,$$

то есть, если$|x| = |y| = |z| = |t|$ и$xy - zt = 0$, т.е. x, y, z, t — одного знака.

№7. *Решить уравнение:* $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$

Решение

Пусть $y = (x^2 - x + 1)^2$, тогда$y^2 - 10x^2y + 9x^4 = 0$. Решив это уравнение относительно y, получим:

$$y_1 = 9x^2, y_2 = x^2.$$

Итак, данное уравнение свелось к двум следующим:

$$(x^2 - x + 1)^2 = 9x^2 \text{и} \;\; (x^2 - x + 1)^2 = x^2,$$

то есть к четырём квадратным уравнениям

$x^2 - x + 1 = 3x,$

$x^2 - x + 1 = -3x,$

$x^2 - x + 1 = x,$

$x^2 - x + 1 = -x,$

решить которые не представляет труда.

Ответ: -1; 1; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$.

№8. *Представьте число 2016 в виде суммы наибольшего количества последовательных натуральных чисел. В ответ запишите число членов этой суммы.*

Решение

По условию задачи $2016 = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+n)$.

В правой части равенства стоит сумма $(n+1)$ членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = x$ и разностью $d = 1$.

Воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии:

$$2016 = \frac{2a_1 + dn}{2} \cdot (n+1) = \frac{2x+n}{2} \cdot (n+1) = \left(x + \frac{n}{2}\right) \cdot (n+1).$$

Числа 2016, $n+1$ – натуральные, поэтому число $x + \frac{n}{2}$ тоже должно быть натуральным. Следовательно, число n должно делиться на 2 и быть наибольшим из всех возможных. Тогда $n+1$ – наибольший нечетный множитель числа 2016.

Разложим число 2016 на множители:

$2016 = 2 \cdot 1008 = 4 \cdot 504 = 8 \cdot 252 = 16 \cdot 126 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$

В этом разложении наибольший нечетный множитель равен $3^2 \cdot 7 = 63$.

Следовательно, $n + 1 = 63$, т.е. $n = 62$, а $x + \frac{n}{2} = 2^5 = 32$, значит $x = 32 - \frac{62}{2} = 32 - 31 = 1$.

Поэтому $2016 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 63$.

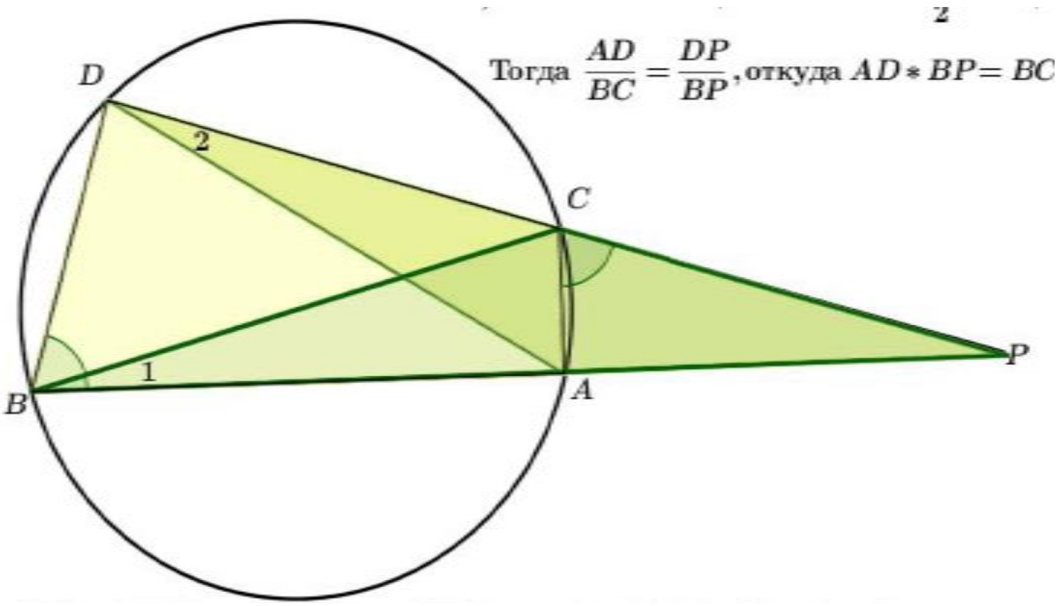
Ответ: 63.

№9. *Четырехугольник ABDC вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке P.*

а) Докажите, что AD·BP=BC·DP.

б) Найдите площадь треугольника APC, если известно, что BD=2·AC, а площадь четырехугольника ABDC равна 36.

Решение

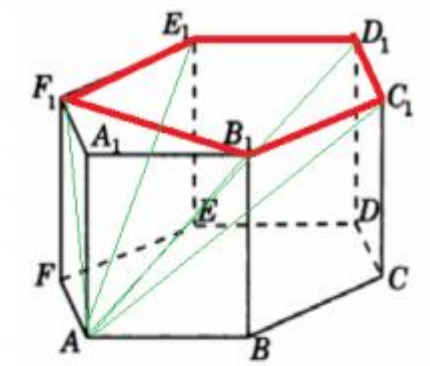


а) $\Delta ADB \sim \Delta CBP$, т. к. $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \frac{1}{2} \cup AC$; $\measuredangle P$ —общий.
Тогда $\frac{AD}{BC} = \frac{DP}{BP}$, откуда $AD \cdot BP = BC \cdot DP$.
б) $\Delta APC \sim \Delta DPB$, т. к. $\measuredangle ACP = \measuredangle DBP = 180° - \measuredangle ACD$; $\measuredangle P$ —общий.
$\frac{S_{APC}}{S_{DPB}} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Тогда

$$S_{APC} = x;\ S_{DPB} = 4x;\ S_{ABDC} = 4x - x = 3x.$$
$$3x = 36;\ x = 12 = S_{APC}.$$

Ответ: 12.

№10. *Дана правильная шестиугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 6.*
Найдите объем многогранника с вершинами в точках $AB_1C_1D_1E_1F_1$.



Решение:
Искомый многогранник - это пирамида с вершиной в точке A и основанием $B_1C_1D_1E_1F_1$. Ее высотой является боковое ребро призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а площадь фигуры $B_1C_1D_1E_1F_1$ состоит из пяти правильных треугольников. Такие же шесть правильных треугольников составляют площадь основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Тогда искомый объем многогранника равен $V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 6 = 20$.

Ответ 20.

4. Продолжительность выполнения заданий олимпиады:

4 часа (240 минут).

5. Максимальное количество баллов по каждому заданию:

В соответствии с целями олимпиады каждый вариант задания делится на три части по уровню сложности задач. Задачам каждой из частей назначается максимальный балл 8, 10, 14 таким образом, чтобы сумма баллов, за полностью безупречно выполненное задание составляла 100 баллов.

Тип задания	**Задачи первого уровня сложности**				**Задачи второго уровня сложности**				**Задачи третьего уровня сложности**	
Номер задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Максимальный балл	**8**	**8**	**8**	**8**	**10**	**10**	**10**	**10**	**14**	**14**
Всего 100 баллов	**32**				**40**				**28**	

В ходе проверки экзаменационной работы задача оценивается максимальным баллом только в том случае, когда в чистовике приведено ее **полное решение без ошибок** на промежуточных этапах, завершающееся **верным ответом. Решение в черновике не засчитывается, поскольку черновик не проверяется!**

6. Критерии оценки задания:

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи первого уровня сложности - 8 баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
8	Полное верное решение.
7-8	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3	Верно рассмотрен один из существенных случаев или доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-2	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи второго уровня сложности - 10 баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
10	Полное верное решение.
9-10	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
6-8	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
4-5	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-2	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи третьего уровня сложности - 14 баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
14	Полное верное решение.
12-13	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
9-11	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
6-8	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
5	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-4	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) При проверке работы оценивается степень ее правильности и полноты; Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов;

недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.

7. Рекомендуемая литература:

1. Коннова Е. Г., Иванов С. О. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Производная: задания В9 и В15. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
2. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.: Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С3. Решение неравенств с одной переменной. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
3. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.: Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решениепланиметрических задач (С4). – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
4. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-тренировочные тесты по новой спецификации: В1-В15, С1-С6. Учебно-методическое пособие /под редакцией Лысенко Ф.Ф., Калабухова С.Ю. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
5. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена.: М.: Айрис-пресс, 2012.
6. Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов К.М., Ященко И.В. ЕГЭ-2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. – «МЦНМНО», 2013.
7. Гордин. Р. К. ЕГЭ 2012. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. Семенова А. Л. и Ященко И. В.— 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.
8. Сергеев И. Н., Панферов В.С. ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / — М: Издательство «Экзамен», 2012 (Серия «ЕГЭ. Практикум»).
9. Локоть В.В.: Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем. - М., Издательство: АРКТИ, 2010.
10. Локоть В.В.: Задачи с параметрами.Применение свойств функций, преобразование неравенств. - М., Издательство: АРКТИ, 2010.
11. Балаян Э.Г. 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике, – Ростов на Дону, Издательство: Феникс, 2008.
12. Балаян Э.Г. Готовимся к олимпиадам по математике. 5-11 классы, – Ростов на Дону, Издательство: Феникс, 2009.
13. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре – М.: Просвещение, 1976.
14. Тригг У. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.
15. Геометрические олимпиады им. И.Ф. Шарыгина / Сост. А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Д. И. Шарыгин. — М.: МЦНМО, 2007.

16.Открытый банк математических задач. - www.ege.ru;
17.Сайт ФИПИ: http://www.fipi.ru/;
18.Единый государственный экзамен по математике [Электронный ресурс] – http://mathege.ru/;
19. Электронный ресурс- http://www.alexlarin.net/;