Условия проведения второго этапа для участников Межрегиональной многопрофильной олимпиады школьников Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Предмет «Математика»

Основными целями и задачами олимпиады является поддержка одарённых детей, развитие у школьников интереса к научной деятельности и проявлению творческих способностей, повышение доступности получения высшего образования.

Задания

Задания олимпиады разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Комплект олимпиадных заданий формируется из четырех параллельных вариантов заданий. Варианты заданий каждого комплекта содержат одинаковое как общее количество заданий, так и количество заданий одинаковой сложности.

Задачи для математической олимпиады подбираются таким образом, чтобы для их решения не требовалось специальных знаний, выходящих за рамки стандартного школьного курса.

Каждый вариант содержит три типа задач: задачи первого, второго и третьего уровней сложности. Задачи первого уровня сложности нацелены на выявление базовых теоретических знаний, навыков владения терминологией, понятийным аппаратом и стандартными алгоритмами. Задачи второго уровня сложности позволяют выявить комплексные интеллектуальные математические умения, т.е. умения применять знания нескольких разделов школьной программы по математике для решения конкретных задач. Задачи третьего уровня сложности направлены на выявление общей эрудиции, степени ориентированности в теоретическом материале, логики мышления, способности анализировать ситуацию и находить подходы и верный путь решения в нестандартных ситуациях.

Варианты олимпиадных заданий по своему содержанию носят сбалансированный характер, охватывая все ключевые, наиболее важные элементы программного учебного материала по математике. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень. Контрольно-диагностические материалы позволяют установить уровень усвоения выпускниками федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, а также позволяют проявить творческий потенциал, способность к самостоятельному мышлению, необходимые для успешного усвоения университетской программы по математике.

Объем работы

Каждый вариант состоит из 10 заданий: 4 задания первого уровня сложности; 4 задания второго уровня и 2 задания третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное, обоснованное решение задачи. Порядок выполнения заданий не важен. Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

Необходимые для пояснения решения **чертежи и рисунки выполняются от руки.**

Все вычисления проводятся вручную, **без использования калькулятора.**

Примерная тематика работы:

Задачи первого уровня сложности требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения участнику олимпиады нужно уметь производить простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть:

- текстовые задачи (задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения);
- задачи на прогрессии;
- тригонометрические уравнения или системы уравнений, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений;
- рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения и их системы;
- задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе простейшие задачи по планиметрии и стереометрии.

Задачи второго уровня сложности содержат

- рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы;
- задачи, связанные с исследование функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных функций: находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

Задачи третьего уровня сложности включают

- задания по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов площадей), поверяющие знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения;
- задачи на использование производной, которые проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с векторами и координатами);
- задачи, требующие умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметром при наличии ограничений на неизвестные. Умение решать подобные задачи показывает уровень логического мышления конкурсанта, его способность находить выход из нестандартной ситуации;
- задачи по стереометрии, для решения которых необходимо владеть методикой построения геометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Умение решать такие задачи показывает уровень развития пространственного воображения конкурсанта.

Примеры и конкретные характеристики задач и вариантов заданий олимпиады по математике приведены ниже.

Образец варианта

1. *Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 40% больше, чем Саша, но на 30% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?*

Решение

Пусть $x-$ количество грибов, собранных Сашей; $y-$ количество грибов, собранных Верой; $z-$ количество грибов, собранных Ларисой. Тогда по условию задачи $y=1{,}4x$ и $y=0{,}7z$. Следовательно, $x=0{,}5\,z$. Тогда $z-x=z-0{,}5\,z=0{,}5z$. Значит, Саша собрал грибов на 50% меньше, чем Лариса.

Ответ: на 50%

2. *Упростить выражение* $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

Решение

Заметим, что $29-12\sqrt{5}=\left(2\sqrt{5}-3\right)^2$. Тогда

$$\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{3-2\sqrt{5}+3}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}-1.$$

Поэтому $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=1.$

Ответ: 1.

3. *Решить уравнение:* $\sqrt{2^{(x^2)}}=\left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

Решение

$$2^{\frac{x^2}{2}}=2^{5\sqrt[5]{x}}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}=5\sqrt[5]{x}\Leftrightarrow x^2=10\sqrt[5]{x}\Leftrightarrow x^{10}=10^5x\Leftrightarrow x(x^9-10^5)=0\Rightarrow$$
$$x_1=0;\ x_2=\sqrt[9]{100000}.$$

Ответ: $x_1=0;\ x_2=\sqrt[9]{100000}.$

4. *Теннисные шары упаковывают в коробки двух видов: коробки, имеющие форму куба и коробки, имеющие форму цилиндра. Теннисный шар упакован в коробку цилиндрической формы так, что кроме боковых стенок цилиндра он касается дна и крышки коробки. Если шар упакован в коробку кубической формы, то он касается всех граней куба. Сравните процентное отношение пустого места к занятому в каждой из этих упаковок.*

Решение

Имеем шар, вписанный в цилиндр.

$V_{цилиндра}=\pi R^2h$. Но $h=2R$, где $R-$ радиус шара. Тогда $V_{цилиндра}=2\pi R^3$. С другой стороны $V_{шара}=\frac{4}{3}\pi R^3$. Поэтому объем пустого (не заполненного шаром) места в коробке равен

$$V_{пустого\ места\ в\ цилиндре}=V_{цилиндра}-V_{шара}=2\pi R^3-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

$\frac{V_{пустого\ места\ в\ цилиндре}}{V_{шара}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{V_{пустого\ места}}{V_{шара}} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$.

Имеем шар, вписанный в куб со стороной $2R$. Объем куба равен: $V_{куба} = 8R^3$.

$V_{пустого\ места\ в\ кубе} = V_{куба} - V_{шара} = 8R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$.

$\frac{V_{пустого\ места\ в\ кубе}}{V_{шара}} \cdot 100\% = \frac{8R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 100\% = \frac{6-\pi}{\pi} \cdot 100\% \approx 91\%$.

Ответ: в кубе около 91% пустого места; в цилиндре 50%.

5. *Решите неравенство:* $\frac{3}{x+2-3\sqrt{x}} \leq \frac{2}{x+1-2\sqrt{x}}$..

Решение

Делаем замену: $\sqrt{x} = t, t \geq 0$. Тогда $x = t^2$, а исходное неравенство примет вид:

$$\frac{3}{t^2-3t+2} \leq \frac{2}{t^2-2t+1} \Leftrightarrow \frac{3}{(t-1)(t-2)} - \frac{2}{(t-1)^2} \Leftrightarrow \frac{3t-3-2t+4}{(t-2)(t-1)^2} \leq 0.$$

Имеем:

$$\frac{t+1}{(t-2)(t-1)^2} \leq 0, t \geq 0$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим:

$t \in [0;1) \cup (1;2) \Leftrightarrow x \in [0;1) \cup (1;4)$.

Ответ: $x \in [0;1) \cup (1;4)$.

6. *Найдите множество значений функции* $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}$.

Решение

Функция $t = \sqrt{9-x^2}$ принимает значения $t \in [0;3]$. Рассмотрим функцию $y = 11 - (9-t^2) - 2t$, определенную на отрезке $[0;3]$. Графиком функции

$y = t^2 - 2t + 2$ является парабола с вершиной в точке $t = 1$ и ветвями, направленными вверх. Таким образом, минимальное значение $y = 1$, оно достигается при $t = 1$. Максимальное значение $y = 5$, оно достигается при $t = 3$. Следовательно, функция $y = f(x)$ принимает значения из отрезка $[1; 5]$.

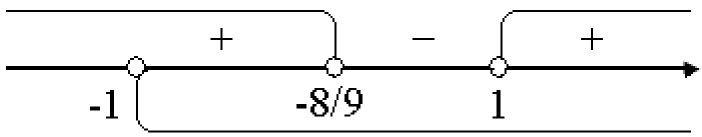
Ответ: $f(x) \in [1; 5]$.

7. *Решите неравенство*

$$\log_3 (x+1)^3 - 2\log_3 \left(x^2 + 3x + 2\right) - \log_3 (x+2) \cdot \log_3 (x+1) + 2 < 0$$

Решение

Область определения неравенства $x > -1$. Введем обозначения $a = \log_3 (x+1);\ b = \log_3 (x+2)$ и преобразуем исходное неравенство, разложив второе слагаемое на сумму логарифмов $3a - 2a - 2b - ab + 2 < 0 \Leftrightarrow a - 2b - ab + 2 < 0 \Leftrightarrow (a+2)(b-1) > 0$. Возвратимся к переменной x и решим методом интервалов полученное неравенство $\left(\log_3 (x+1) + 2\right)\left(\log_3 (x+2) - 1\right) > 0$. Корни левой части $x = -\frac{8}{9}$ и $x = 1$. Откуда



с учетом области определения неравенства получаем ответ (см. Рис.).

Ответ: $x \in \left(-1; -\frac{8}{9}\right) \cup (1; +\infty)$.

8. *Решите уравнение*: $cos(x^2 + x) + cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

Решение

Заметим, что

$cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2cos(x + \pi)cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = cos(x + \pi).$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$cos(x^2 + x) + \ cos(x + \pi) = 0.$$

Отсюда, преобразовав сумму косинусов в их произведение, придем к уравнению:

$2cos\frac{x^2+2x+\pi}{2}cos\frac{x^2-\pi}{2} = 0.$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

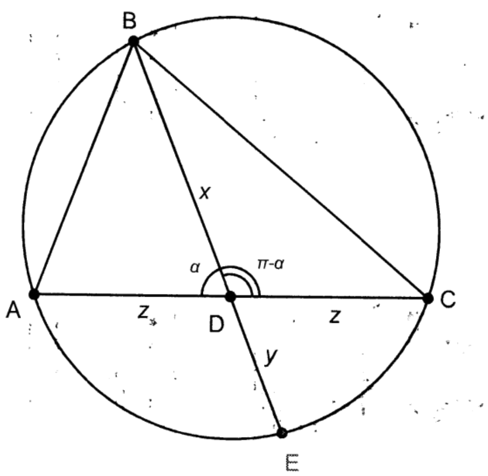
$$\left[\begin{array}{l} cos\frac{x^2+2x+\pi}{2} = 0 \\ cos\frac{x^2-\pi}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2+2x+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x^2-\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 2\pi n = 0 \\ x^2 = 2\pi + 2\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n} \\ x = \pm\sqrt{2\pi m} \end{array}\right. , n = 0,1,2 \dots ; \ m = 0,1, \dots .$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n} \\ x = \pm\sqrt{2\pi m} \end{array}\right. , n = 0,1,2 \dots ; \ m = 0,1, \dots .$

9. *В треугольнике* ABC *продолжение медианы* BD *пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке* E. *Найдите* BD, *если* $AB = 7, BC = 9, BE = 13$.

Решение



Положим BD = x, ED = y, AD = CD = z, ∠ADB = α. По свойству пересекающихся хорд: $AD \cdot DC = BD \cdot ED$, т.е. $z^2 = xy$. По теореме косинусов, примененной к треугольникам ADB и DBC:

$$AB^2 = 49 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha;\ BC^2 = 81 = x^2 + z^2 + 2xz\cos\alpha.$$

Складывая эти равенства, получим $x^2 + z^2 = 65.$ Кроме этого, $BE = x + y = 13.$

Таким образом, имеем систему уравнений $\begin{cases} z^2 = xy \\ x^2 + z^2 = 65 \\ x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = xy \\ x^2 + xy = 65 \\ x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$

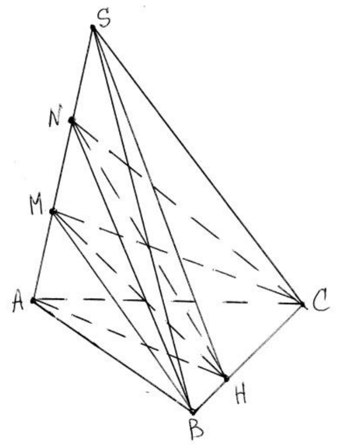
$$\begin{cases} z^2 = xy \\ x^2 + x(13 - x) = 65. \\ y = 13 - x \end{cases}$$

Решив уравнение $x^2 + x(13 - x) = 65$, получим $13x = 65, т.е. x = 5.$

Ответ: 5.

10. *На ребре AS треугольной пирамиды SABC отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если известно, что площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1,2,$\sqrt{37}$ соответственно.*

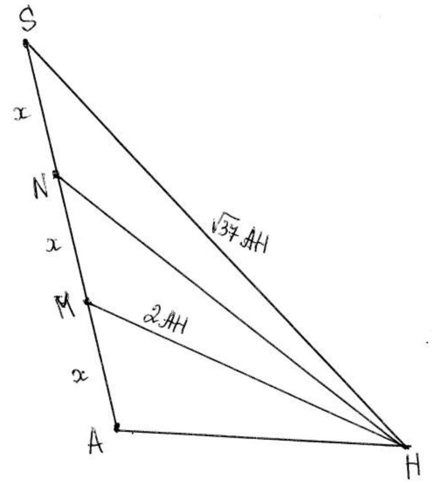
Решение



Строим плоскость $ASH \perp BC$. Тогда $AH \perp BC, SH \perp BC$. Кроме того, плоскость ASH пересекает плоскости MBC и NBC соответственно по прямым MH и NH. Следовательно, $MH \perp BC$ и $NH \perp BC$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 1;\ S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}MH \cdot BC = 2;\ S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SH \cdot BC = \sqrt{37}.$$

Отсюда $AH = \frac{2}{BC}$, $MH = \frac{4}{BC} = 2\,AH,\ SH = \frac{2\sqrt{37}}{BC} = \sqrt{37}AH$.



$S_{\Delta NBC} = \frac{1}{2} NH \cdot BC$. Найдем NH.

Обозначим $AM = MN = NS = x, \measuredangle SAH = \alpha$.

Применив теорему косинусов, из треугольников AMH и ASH, находим:

$$MH^2 = x^2 + AH^2 - 2xAHcos\alpha = 4AH^2;$$

$$SH^2 = 9x^2 + AH^2 - 6xAHcos\alpha = 37AH^2.$$

Отсюда получим: $x = \frac{3AH}{\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ANH:

$$NH^2 = 4x^2 + AH^2 - 4xAHcos\alpha = 4 \cdot \frac{9}{2}AH^2 + AH^2 - 4 \cdot \frac{3AH}{\sqrt{2}} \cdot AH \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 16AH^2.$$

Отсюда находим $NH = 4AH$.

Следовательно, $S_{\Delta NBC} = \frac{1}{2} NH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4AH \cdot BC = 4S_{\Delta ABC} = 4$.

Ответ: 4.

Продолжительность выполнения заданий олимпиады:4 часа (240 минут).

Максимальное количество баллов по каждому заданию:

В соответствии с целями олимпиады каждый вариант задания делится на три части по уровню сложности задач с соотношением сложности 1,0; 1,25; 1,5. Задачам каждой из частей назначается максимальный балл 4, 5, 7 таким образом, чтобы сумма баллов, за полностью безупречно выполненное задание составляла 50 баллов.

Тип задания	Задачи первого уровня сложности				Задачи второго уровня сложности				Задачи третьего уровня сложности	
Номер задачи									9	10
Максимальный балл									7	7
Всего баллов 50	16				20				14	

В ходе проверки экзаменационной работы задача оценивается максимальным баллом только в том случае, когда в чистовике приведено ее **полное решение без ошибок** на промежуточных этапах, завершающееся **верным ответом. Решение в черновике не засчитывается, поскольку черновик не проверяется!**

Критерии оценки задания:

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи первого уровня сложности - 4 балла:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
4	Полное верное решение.
3-4	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
2-3	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
2	Верно рассмотрен один из существенных случаев или доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи второго уровня сложности - 5 баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
5	Полное верное решение.
4-5	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3-4	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
2-3	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимальное число баллов, которое можно получить за решение каждой задачи третьего уровня сложности - 7 баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) При проверке работы оценивается степень ее правильности и полноты;

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.: Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С3. Решение неравенств с одной переменной. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
2. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.: Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение планиметрических задач (С4). – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.

3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-тренировочные тесты по новой спецификации: В1-В15, С1-С6. Учебно-методическое пособие /под редакцией Лысенко Ф.Ф., Калабухова С.Ю. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
4. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена.: М.: Айрис-пресс, 2012.
5. Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов К.М., Ященко И.В. ЕГЭ-2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. – «МЦНМНО», 2013.
6. Гордин. Р. К. ЕГЭ 2012. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. Семенова А. Л. и Ященко И. В.— 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.
7. Сергеев И. Н., Панферов В.С. ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / — М: Издательство «Экзамен», 2012 (Серия «ЕГЭ. Практикум»).
8. Локоть В.В.: Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем. - М., Издательство: АРКТИ, 2010.
9. Локоть В.В.: Задачи с параметрами. Применение свойств функций, преобразование неравенств. - М., Издательство: АРКТИ, 2010.
10. Балаян Э.Г. 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике, – Ростов на Дону, Издательство: Феникс, 2008.
11. Балаян Э.Г. Готовимся к олимпиадам по математике. 5-11 классы, –Ростов на Дону, Издательство: Феникс, 2009.
12. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре – М.: Просвещение, 1976.
13. Тригг У. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.
14. Геометрические олимпиады им. И.Ф. Шарыгина / Сост. А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Д. И. Шарыгин. — М.: МЦНМО, 2007.
15. Открытый банк математических задач. - www.ege.ru;
16. Сайт ФИПИ: http://www.fipi.ru/;
17. Единый государственный экзамен по математике [Электронный ресурс] – http://mathege.ru/;
18. Электронный ресурс- http://www.alexlarin.net/;