СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО КАК СРЕДСТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Терехова Л.А.
Россия, Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева
lterehova@mail.ru

Введение элементов логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей в структуру школьного курса математики направлено на расширение кругозора учащихся, на формирование у них вероятностного стиля мышления. Приобретенные стохастические знания и умения, должны пригодиться учащимся при решении практических задач в повседневной, реальной жизни, а именно, для формирования умения выстраивать логически аргументированные доказательства, умения анализировать реальные числовые данные и в результате принимать обоснованные решения, умения оценивать вероятности наступления конкретных событий.

Однако, несмотря на все положительные эффекты от введения стохастической компоненты в структуру школьного курса математики, её изучение происходит обособленно, эпизодически и, как правило, сопряжено с определенными трудностями. Наибольшие проблемы возникают у школьников в процессе решения комбинаторных задач на перебор вариантов, правило сложения и умножения вероятностей. Еще большие трудности возникают, когда при решении задачи возникает необходимость не только выбрать все возможные варианты, но и подсчитать вероятности их наступления.

Все это обусловливает необходимость дополнения стохастического материала наглядными средствами обучения. На начальном этапе обучения это проведение реальных экспериментов, фиксирование результатов эксперимента в таблицах, построение столбчатых и круговых диаграмм, стохастических деревьев.

Решение разнообразных комбинаторных задач лучше усваивается учащимися, если рассматриваемую ситуацию можно смоделировать, представить схематично, графически. Внешне такая схема напоминает дерево, поэтому его называют деревом возможных вариантов. При правильном построении дерева все возможные варианты решения будут учтены. Если на «ветвях» дерева возможных вариантов еще и указать значение соответствующих вероятностей, то такое дерево называется стохастическим деревом. В этом случае с помощью стохастического дерева можно не только рассмотреть все возможные варианты, но и вычислить вероятности их наступления.

Рассмотрим на конкретных примерах, как может быть использовано стохастическое дерево на разных этапах обучения элементов стохастики, начиная от перебора возможных вариантов и заканчивая формулами на сложение и умножение вероятностей.

Пример 1. Школьник после уроков гуляет по дорожкам парка (рисунок 1). На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Учащийся начинает прогулку в точке A. Найдите вероятность того, что он придет в точку G.

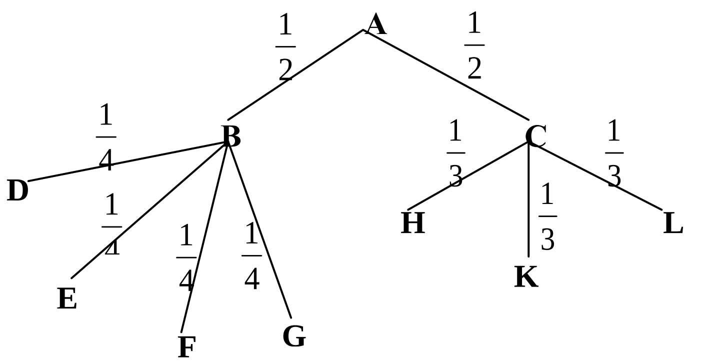

Рисунок 1. Схема парка

Решение. Схема парка представляет собой дерево возможных вариантов, поскольку с помощью него можно определить, что у школьника есть 7 вариантов движения: ABD, ABE, ABF, ABG, ACH, ACK, ACL. Расставив на тропинках – «ветвях» дерева вероятности, получим стохастического дерево, с помощью которого легко определить, что вероятность школьника попасть из точки А в точку *G* равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Рассмотрим задачу, которую включают в варианты ЕГЭ профильного уровня.

Пример 2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стекол, вторая – 55 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая – 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Представим решение задачи с помощью стохастического дерева (рисунок 2).

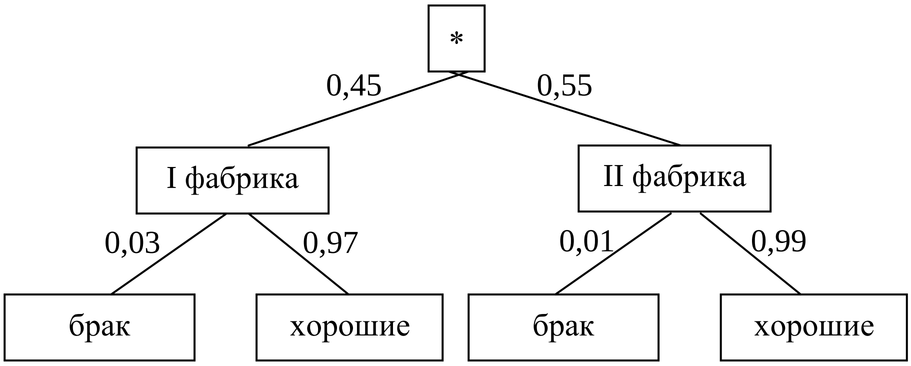

Рисунок 2. Стохастическое дерево

Легко заметить, что вероятность купить бракованное стекло, произведенное на первой фабрике, равна $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$, а соответственно на второй фабрике $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$, тогда вероятность того, что будет куплено бракованное стекло, находится как сумма этих вероятностей и равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Рассмотрим более сложный пример, в котором нужно не просто подсчитать вероятность, а сравнить и определить более справедливое решение [1, с. 7-8.].

Пример 3. В жюри из трёх человек два члена независимо друг от друга принимать правильное решение с вероятностью *p*, а третий для вынесения решения бросает монету (окончательное решение будет выноситься большинством голосов). Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью *p*. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Решение. Для решения задачи построим стохастическое дерево (рисунок 3). Для удобства справедливое решение двух членов жюри обозначим буквой С, а несправедливое буквой Н и вероятность его вынесения соответственно равна (*1–p*). Так как третий член жюри для вынесения решения бросает монету, то вероятность вынесения как справедливого, так и не справедливого решения для него равна $\frac{1}{2}$.

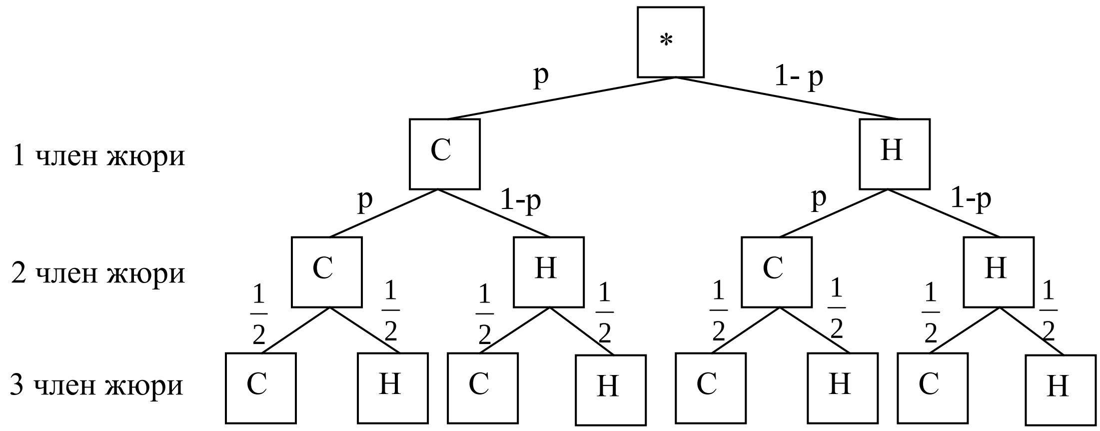

Рисунок 3. Варианты голосования членов жюри

Поскольку результат голосования принимается большинством, то достаточно, чтобы справедливо проголосовали два первых члена жюри, тогда вероятность вынесения справедливого решения равна $p \cdot p = p^2$. Если два первых члена жюри разошлись во мнениях, например, проголосовали как *СН* или *НС*, соответственно с вероятностью

$$p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = 2p(1-p).$$

В этом случае для вынесения справедливого решения необходимо учесть, что третий член жюри выносит справедливое решение с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда результат голосования примет вид *ССН* или *НСС*, соответственно с вероятностью $2p(1-p)\frac{1}{2} = p(1-p)$.

Поскольку жюри может вынести как справедливое, так и не справедливое решение, то вероятность вынесения решения определяется как $p^2 + p(1-p) = p$, что совпадает с вероятностью вынесения справедливого решения жюри, состоящего из одного человека. Таким образом, оба типа жюри выносят справедливое решение с одинаковой вероятностью.

Пример 4. Рассмотрим лабиринт (рисунок 4). Мышь входит в этот лабиринт и попадает в первую комнату *А*. Из этой комнаты у нее нет другого пути, кроме *а*; при этом она попадает в комнату *Б*. Из комнаты *Б* есть три выхода – *б, в, г*; первые два ведут в третью комнату *В*, третий возвращает назад в *А*. Мышь выбирает любой из этих выходов случайно, с одной и той же вероятностью. Далее, оказавшись в комнате *В*, мышь имеет две возможности для дальнейшего движения: путь *д* возвращает её в комнату Б, а путь е ведет в следующую комнату *Г*. как и раньше, мышь выбирает любой из этих путей случайно с одинаковой вероятностью. Наконец, из комнаты *Г* есть единственный выход – он же является выходом из лабиринта. Через сколько шагов, мышь покинет лабиринт [2, с. 166-170]?

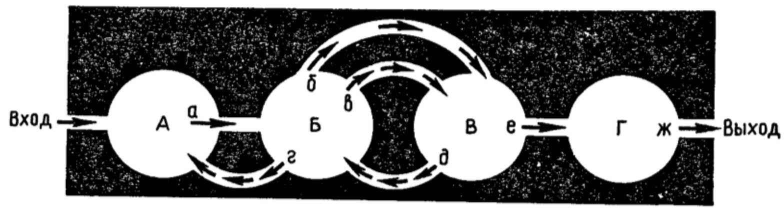

Рисунок 4. Схема лабиринта

Решение. Если мышь находится в *А*, то она может перейти только в комнату *Б*, поэтому вероятность перехода из *А* в *Б* равна 1. Если мышь находится в комнате *В* (из которой три выхода: один в комнату *А* и два в комнату *В*), то она с вероятностью $\frac{1}{3}$ переходит в назад, в комнату *А* и с вероятностью $\frac{2}{3}$ идет дальше, в комнату *В*. Поскольку из комнаты *В* только два выхода, один в комнату *Б*, а другой в комнату *Г*, то мышь с вероятностью $\frac{1}{2}$ переходит в *Б* или с вероятностью $\frac{1}{2}$ переходит в *Г*. Таким образом, решение данной задачи с помощью стохастического дерева, примет вид (рисунок 5):

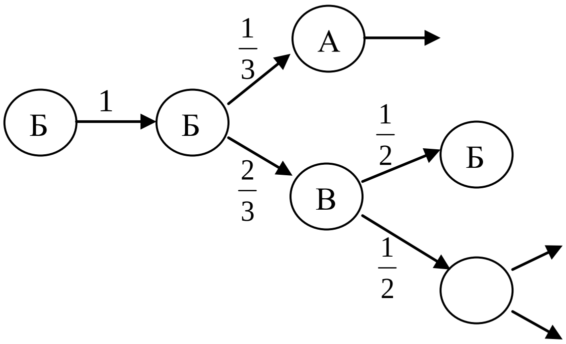

Рисунок 5. Стохастическое дерево с вероятностями перемещения мыши

Для того, чтобы определить, за сколько шагов мышь может покинуть лабиринт, следует построить стохастическое дерево со всеми возможными вариантами (рисунок 6).

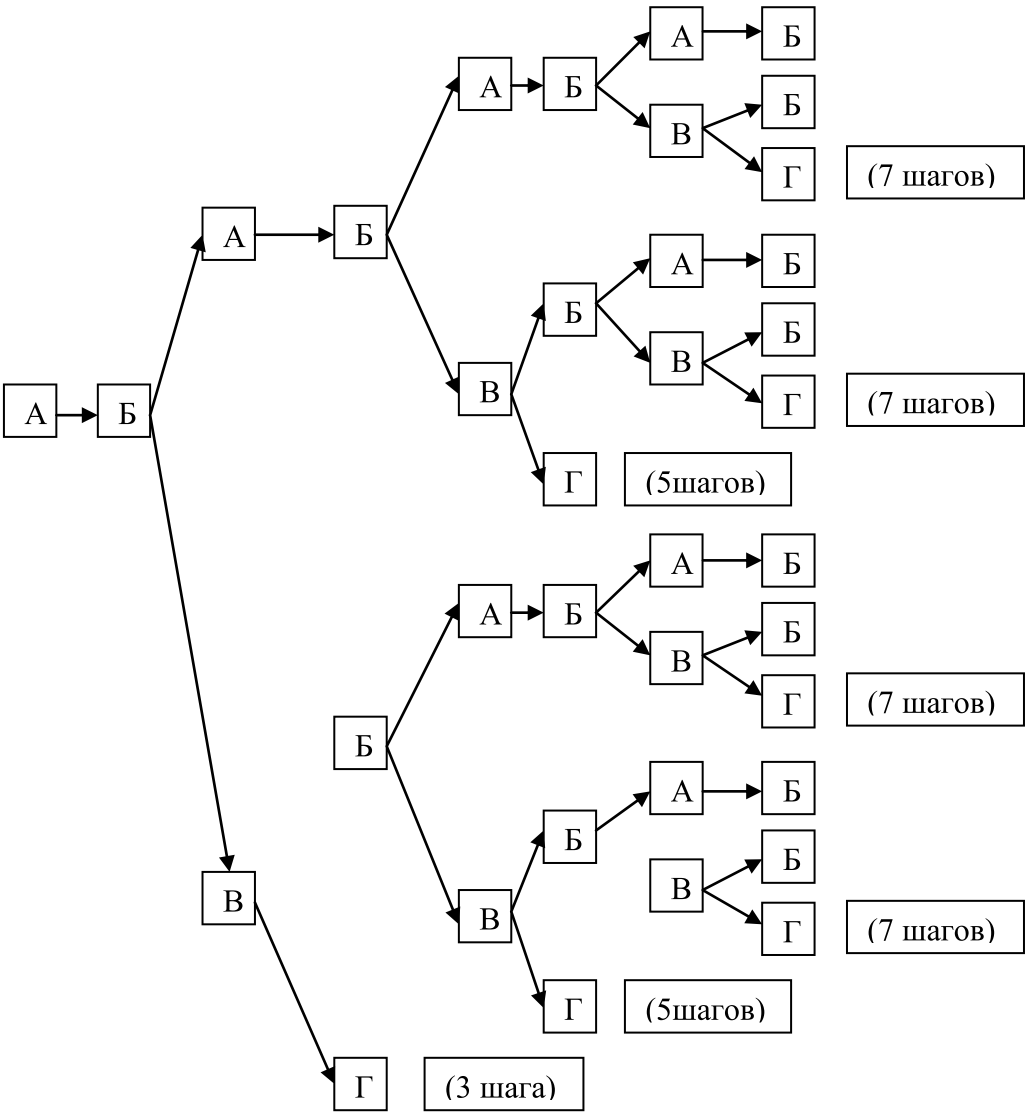

Рисунок 6. Дерево возможных вариантов

Из рисунка видно, что существует один способ найти выход из лабиринта за три шага (*АБВГ*) с вероятностью $\frac{1}{3}$; два способа выйти из лабиринта за пять шагов (*АБВБВГ* и *АБАБВГ*) каждый с вероятностью $\frac{1}{9}$; четыре способа выйти из лабиринта за 7 шагов (*АБАБАБВГ, АБАБВБВГ, АБВБАБВГ* и *АБВБВБВГ*) каждый с вероятностью $\frac{1}{27}$.

Таким образом, вероятность выйти из лабиринта за три шага – $\frac{1}{3}$, за 5 шагов – $\frac{2}{9}$ и за семь шагов – $\frac{4}{27}$.

Таким образом, применение наглядных методов обучения позволяет визуально смоделировать вероятностную задачу, легко объяснить учащимся на разных этапах обучения ключевые понятия теории вероятностей: перебор вариантов, классическое определение вероятности события, вычисление вероятностей с помощью формул сложения и умножения.

Литература

1. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М., 1975.
2. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе средней школы. М., 1979.