Приложение 5

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института

Н. Л. Королева
«21» июня 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине Б1.Б.21 Дифференциальные уравнения

Направление подготовки/специальность: 03.03.02 - Физика

Профиль/направленность/специализация: Фундаментальная физика

Уровень высшего образования: бакалавриат

Квалификация: Бакалавр

год набора: 2020

Тамбов, 2023

Авторы программы:
Кандидат физико-математических наук, доцент Фомичева Юлия Геннадьевна
Кандидат физико-математических наук, доцент Плужникова Елена Александровна

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.02 - Физика (уровень бакалавриата) (приказ Министерства образования и науки РФ от «07» августа 2014 г. № 937).

Рабочая программа принята на заседании Кафедры функционального анализа «14» июня 2023 г. Протокол № 9

Рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института математики, физики и информационных технологий, Протокол от «21» июня 2023 г. № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель дисциплины – формирование компетенций:

ОПК-2 Способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей

1.2 Виды и задачи профессиональной деятельности по дисциплине:

- научно-исследовательская
    - освоение методов научных исследований
    - освоение теорий и моделей
    - участие в проведении физических исследований по заданной тематике
    - участие в обработке полученных результатов научных исследований на современном уровне
    - работа с научной литературой с использованием новых информационных технологий
- педагогическая и просветительская
    - подготовка и проведение учебных занятий в общеобразовательных организациях
    - экскурсионная, просветительская и кружковая работа

1.3 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

Обобщенные трудовые функции / трудовые функции / трудовые или профессиональные действия (при наличии профстандарта)	Код и наименование компетенции ФГОС ВО, необходимой для формирования трудового или профессионального действия	Знания и умения, необходимые для формирования трудового действия / компетенции
	ОПК-2 Способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	Знает и понимает: основные понятия и методы, теории дифференциальных уравнений, математических методов решения профессиональных задач; методы идентификации математических описаний реальных явлений и процессов на основе экспериментальных данных; основные методы и принципы математического моделирования.
		Умеет (способен продемонстрировать): Умеет (способен продемонстрировать): строить модели типовых профессиональных задач, находить способы их решения и интерпретировать профессионально смысл полученного результата; - применять методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач; - применять математические методы при решении типовых профессиональных задач: проводить анализ функций, решать основные задачи математической статистики, решать уравнения и системы дифференциальных уравнений применительно к реальным процессам.
		Владеет:

		Владеет: методами построения математических моделей типовых профессиональных задач, способами нахождения решений математических моделей и содержательной интерпретации полученных результатов; - методами математической обработки результатов решения профессиональных задач; - пакетами прикладных программ для моделирования реальных процессов и явлений.

1.4 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, обеспечивающих освоение компетенций:

ОПК-2 Способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения				
		Очная (семестр)				
		1	2	3	4	5
1	Аналитическая геометрия и линейная алгебра	+				
2	Аналитические методы в физике			+	+	+
3	Математический анализ	+	+			
4	Физика случайных процессов			+	+	+

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата:

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к базовой части учебного плана ОП по направлению подготовки 03.03.02 - Физика.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» изучается в 3 семестре.

3.Объем и содержание дисциплины

3.1.Объем дисциплины: 7 з.е.

Очная: 7 з.е.

Вид учебной работы	Очная (всего часов)
Общая трудоёмкость дисциплины	**252**
Контактная работа	96
Лекции (Лекции)	48
Практические (Практ. раб.)	48
Самостоятельная работа (СР)	120
Экзамен	36

3.2.Содержание курса:

№ темы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час.	Формы текущего контроля

		Лекции	Практ. раб.	СР	
		О	О	О	
3 семестр					
1	Дифференциальные уравнения первого порядка	16	16	40	Контрольная работа; Тестирование
2	Дифференциальные уравнения высшего порядка	16	16	40	Контрольная работа; Тестирование
3	Линейные системы дифференциальных уравнений	16	16	40	Контрольная работа; Тестирование

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка (ОПК-2)

Лекция.

Лекция 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши.

Лекция 2. Классы дифференциальных уравнений и их характеристики. Уравнения с разделяющимися переменными. Первый интеграл.

Лекция 3. Однородные уравнения. Редукция однородного уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Лекция 4. Линейные дифференциальные уравнения. Метод вариации.

Лекция 5. Уравнения Бернулли. Редукция уравнения Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.

Лекция 6. Уравнение Риккати.

Лекция 7. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 8. Замена переменной. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Практическое занятие.

Практические занятия.

Занятие №1. Уравнения с разделяющимися переменными [2] №51-65.

Занятие №2,3. Однородные уравнения. Редукция однородного уравнения к уравнению с разделяющимися переменными. [2] №101-129.

Занятие № 4-.6 Линейные дифференциальные уравнения. Метод вариации. Уравнения Бернулли. Редукция уравнения Бернулли к линейному дифференциальному уравнению. Уравнение Риккати. [2] №136-172.

Занятие №7,8 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Замена переменной. [2] №186-220.

Занятие №9. Контрольная работа№1.

Задания для самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал.

Научиться решать уравнения с разделяющимися переменными

Научиться решать однородные уравнения первого порядка.

Научиться решать линейные уравнения первого порядка.

Научиться решать уравнения Бернулли.

Признак разрешимости уравнения Риккати. Научиться решать уравнения Риккати.

Научиться распознавать и решать уравнения в полных дифференциалах. Научиться находить интегрирующий множитель.

Научиться решать уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка (ОПК-2)

Лекция.

Лекция 9. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами.

Лекция 10.Структура множества решений. Фундаментальная система решений.

Лекция 11. Линейная зависи¬мость решений от начальных значений. Определитель Вронского.

Лекция 12. Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Принцип суперпозиции.

Лекция 13. Метод вариации произвольных постоянных.

Лекция 14. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Лекция 15. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура частного решения.

Лекция 16. Методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие.

Практические занятия

Занятие №10,11. Уравнения, допускающие понижение порядка.[2] №421-500

Занятие №12,13. Методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.[2] №511-618.

Занятие №15 Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Линейная зависи¬мость решений от начальных значений. Определитель Вронского. Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Метод вариации произвольных постоянных.
[2] №641-750.

Занятие №16. Контрольная работа №2.

Задания для самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы.

Изучить теоретический материал. Научиться применять теоретические сведения при решении задач.

Научиться определять основные типы уравнений, допускающих понижение порядка.

Изучить основные подстановки и научиться решать уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Изучить линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков.

Научиться решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения с правой частью специального вида.

Научиться решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных.

Тема 3. Линейные системы дифференциальных уравнений (ОПК-2)

Лекция.

Лекция 17. Системы дифференциальных уравнений, методы решений.

Лекция 18. Методы решения линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие.

Практические занятия

Занятие №17. Системы дифференциальных уравнений, методы решений. Методы решения линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами. [2] №786-875.

Занятие №18. Контрольная работа №3

Задания для самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы:

1. Изучить основные методы решения линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами;

2. Научиться применять теоретические сведения при решении задач;

4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства

4.1. Распределение баллов:

3 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 40 баллов
- контрольные срезы – 2 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ темы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Max. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Дифференциальные уравнения первого порядка	**Контрольная работа(контрольный срез)**	10	Контрольная работа состоит из 5 заданий за правильное выполнение каждой студент получает 2 балла
		Тестирование	10	Тест состоит из 10 заданий за правильное выполнение каждого студент получает 1 балл
2.	Дифференциальные уравнения высшего порядка	Контрольная работа	10	Контрольная работа состоит из 5 заданий за правильное выполнение каждой студент получает 2 балла
		Тестирование	10	Тест состоит из 10 заданий за правильное выполнение каждого студент получает 1 балл
3.	Линейные системы дифференциальных уравнений	**Контрольная работа(контрольный срез)**	10	Контрольная работа состоит из 5 заданий за правильное выполнение каждой студент получает 2 балла
		Тестирование	10	Тест состоит из 10 заданий за правильное выполнение каждого студент получает 1 балл
4.	Посещаемость		10	10 баллов – студент посетил все 100% занятий 7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий 4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий 1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются
5.	Премиальные баллы		20	Дополнительные премиальные баллы могут быть начислены: - постоянная активность во время практических занятий – 5 баллов; - участие в проектах – 5 баллов; - участие в конференциях – 10 баллов.
6.	Ответ на экзамене		30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
7.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы		20	Добор: студент может предоставить все задания текущего контроля и контрольные срезы

8.	Итого за семестр	100	

Итоговая оценка по экзамену выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной шкале. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

4.2 Типовые оценочные средства текущего контроля

Контрольная работа

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Типовые темы контрольных работ

Контрольная работа №1

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$2(y+y')=x+2.$$
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

1. $(x^3+2x)y^2dy = xdx$;
2. $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx$;
3. $\frac{y'}{y} = x\cos^2 y$;
4. $y'x^2e^y = e^{-y}$, $y(1)=0$;
5. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx = 0$, $y(0)=2$.

3. Решить однородные уравнения
   1. $x^2y'-y^2 = 2x^2$;
   2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$;
   3. $xydy - y^2dx = (x+y)^2e^{-y/x}dx$;
   4. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$;
   5. $(y^2-3x^2)dy+2xydx = 0$, $y(0)=1$.

4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
   1. $y'+2xy = xe^{-x^2}$;
   2. $2ydx+(y^2-6x)dy = 0$;
   3. $xy' = y+x^2\cos x$;
   4. $(x^2-1)y'-xy = x^3-x$, $y(2)=1{,}5$;
   5. $y'+2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0)=1$.

5. Решить уравнение Бернулли
   1. $y' = x^3y^3-xy$;
   2. $xy+2y = x^5y$;
   3. $2(xy'+y) = y^2\ln x$, $y(1)=2$.

6. Решить уравнение в полных дифференциалах
   1. $(y+\frac{2}{x^2})dx+(x+\frac{3}{y^2})dy = 0$;
   2. $\frac{3x^2+y}{y^2}dx = \frac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy$.

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
   $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy = 0$.

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:
   1. $xy'-xe^{x/y} = 2$;
   2. $xydx+(x+1)dy = 0$;
   3. $xy'+3xy^3 = 2y$;
   4. $dy+(3y-e^{3x})dx = 0$;
   5. $(x^3+y^2)dx+2xydy = 0$.

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений
   1. $(xy^2+x)dx+(y^3-x^3y^3)dy=0$;
   2. $xy'+y=y^2$;
   3. $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$;
   4. $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;
   5. $xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+^2y)dy=0$.

10. Решить задачу Коши
   1. $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0)=\frac{2}{3}$;
   2. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0)=1$;
   3. $y\,dx=(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-x)dy$, $y(16)=\pi$.

11. Решить уравнения
   1. $y=x+y'-\ln y'$;
   2. $x[(y')^2-1]=2y'$;
   3. $y=xy'-(y')^2$.

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка

1. Решить уравнения, понизив их порядок
   1. $y''+2xy'=0$;
   2. $(y-1)y''=2(y')^2$;
   3. $y'''+3y'y''=0$;
   4. $yy''=2x(y')^2$, $y(2)=2$, $y'(2)=0,5$.

1. Найти общее решение уравнения
   1. $y''-2y'+4y=0$;
   2. $y''+6y'+9y=0$;
   3. $y''+4y=0$.

2. Решить задачу Коши
   1. $3y''-2y'-8y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$;
   2. $y''+y=0$, $y(\frac{\pi}{4})=2$, $y'(\frac{\pi}{4})=1$.

3. Найти общее решение уравнения

$$2y''+y'-y=f(x),$$

если

   1. $f(x)=3x^2-1$;
   2. $f(x)=3e^{-x}$;
   3. $f(x)=2\sin x$;
   4. $f(x)=e^x\cos 2x$.

4. Найти решение задачи Коши

$$y''+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}\frac{x}{2},\quad y(\frac{\pi}{4})=2,\ y'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

   1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;
   2. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^3$;
   3. $(4x+3)^2 y'' + (4x+3)y' - 16y = 0$;
   4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Контрольная работа №3

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}. \qquad 2)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$3)\ \begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}. \qquad 4)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}.$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \dfrac{1}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{matrix}$$

   Для каждой системы найти фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - y'' + y' + x - 3y = 0 \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

5. По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти $A(x)$ линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, \ x > 0.$$

6. Выбрать метод и решить неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Типовые темы контрольных работ

Контрольная работа №1

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$2(y+y')=x+2.$$
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

1. $(x^3 + 2x)y^2 dy = xdx$;
2. $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx$;
3. $\frac{y'}{y} = x\cos^2 y$;
4. $y'x^2e^y = e^{-y}, y(1) = 0$;
5. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0, y(0) = 2$.

3. Решить однородные уравнения
   1. $x^2y' - y^2 = 2x^2$;
   2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$;
   3. $xydy - y^2 dx = (x+y)^2 e^{-y/x} dx$;
   4. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$;
   5. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1$.

4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
   1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
   2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$;
   3. $xy' = y + x^2 \cos x$;
   4. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x, y(2) = 1{,}5$;
   5. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$.

5. Решить уравнение Бернулли
   1. $y' = x^3y^3 - xy$;
   2. $xy + 2y = x^5 y$;
   3. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2$.

6. Решить уравнение в полных дифференциалах
   1. $(y + \frac{2}{x^2})dx + (x + \frac{3}{y^2})dy = 0$;
   2. $\frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy$.

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
   $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$.

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:
   1. $xy' - xe^{x/y} = 2$;
   2. $xydx + (x+1)dy = 0$;
   3. $xy' + 3xy^3 = 2y$;
   4. $dy + (3y - e^{3x})dx = 0$;
   5. $(x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений
   1. $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0$;
   2. $xy' + y = y^2$;
   3. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$;
   4. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$;
   5. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + {}^2 y)dy = 0$.

10. Решить задачу Коши
   1. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$;
   2. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = 1$;
   3. $y\,dx = (3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy$, $y(16) = \pi$.

11. Решить уравнения
   1. $y = x + y' - \ln y'$;
   2. $x[(y')^2 - 1] = 2y'$;
   3. $y = xy' - (y')^2$.

<u>Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка</u>

1. Решить уравнения, понизив их порядок
   1. $y'' + 2xy' = 0$;
   2. $(y-1)y'' = 2(y')^2$;
   3. $y''' + 3y'y'' = 0$;
   4. $yy'' = 2x(y')^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$.

1. Найти общее решение уравнения
   1. $y'' - 2y' + 4y = 0$;
   2. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
   3. $y'' + 4y = 0$.

2. Решить задачу Коши
   1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$;
   2. $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если
   1. $f(x) = 3x^2 - 1$;
   2. $f(x) = 3e^{-x}$;
   3. $f(x) = 2\sin x$;
   4. $f(x) = e^x \cos 2x$.

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\frac{x}{2}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2,\ y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

   1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;
   2. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^3$;
   3. $(4x+3)^2 y'' + (4x+3)y' - 16y = 0$;
   4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Контрольная работа №3

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases} . \qquad 2)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} , \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$3)\ \begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} . \qquad 4)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases} .$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \dfrac{1}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{matrix}$$

   Для каждой системы найти фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - y'' + y' + x - 3y = 0 \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

5. По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти $A(x)$ линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, \ x > 0.$$

6. Выбрать метод и решить неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тема 3. Линейные системы дифференциальных уравнений

Типовые темы контрольных работ

Контрольная работа №1

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$2(y + y') = x + 2.$$
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

1. $(x^3+2x)y^2dy = xdx$;
2. $dy = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}dx$;
3. $\dfrac{y'}{y} = x\cos^2 y$;
4. $y'x^2e^y = e^{-y}$, $y(1)=0$;
5. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx = 0$, $y(0)=2$.

3. Решить однородные уравнения
   1. $x^2y'-y^2 = 2x^2$;
   2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$;
   3. $xydy - y^2dx = (x+y)^2e^{-y/x}dx$;
   4. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$;
   5. $(y^2-3x^2)dy+2xydx = 0$, $y(0)=1$.

4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
   1. $y'+2xy = xe^{-x^2}$;
   2. $2ydx+(y^2-6x)dy = 0$;
   3. $xy' = y+x^2\cos x$;
   4. $(x^2-1)y'-xy = x^3-x$, $y(2)=1{,}5$;
   5. $y'+2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0)=1$.

5. Решить уравнение Бернулли
   1. $y' = x^3y^3-xy$;
   2. $xy+2y = x^5y$;
   3. $2(xy'+y) = y^2\ln x$, $y(1)=2$.

6. Решить уравнение в полных дифференциалах
   1. $(y+\dfrac{2}{x^2})dx+(x+\dfrac{3}{y^2})dy = 0$;
   2. $\dfrac{3x^2+y}{y^2}dx = \dfrac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy$.

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy = 0$.

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:
   1. $xy'-xe^{x/y} = 2$;
   2. $xydx+(x+1)dy = 0$;
   3. $xy'+3xy^3 = 2y$;
   4. $dy+(3y-e^{3x})dx = 0$;
   5. $(x^3+y^2)dx+2xydy = 0$.

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

   1. $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0$;
   2. $xy' + y = y^2$;
   3. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$;
   4. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$;
   5. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} +^2 y)dy = 0$.

10. Решить задачу Коши

   1. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$;
   2. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = 1$;
   3. $y\,dx = (3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - x)dy$, $y(16) = \pi$.

11. Решить уравнения

   1. $y = x + y' - \ln y'$;
   2. $x[(y')^2 - 1] = 2y'$;
   3. $y = xy' - (y')^2$.

<u>Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка</u>

1. Решить уравнения, понизив их порядок

   1. $y'' + 2xy' = 0$;
   2. $(y-1)y'' = 2(y')^2$;
   3. $y''' + 3y'y'' = 0$;
   4. $yy'' = 2x(y')^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$.

1. Найти общее решение уравнения

   1. $y'' - 2y' + 4y = 0$;
   2. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
   3. $y'' + 4y = 0$.

2. Решить задачу Коши

   1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$;
   2. $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

   1. $f(x) = 3x^2 - 1$;
   2. $f(x) = 3e^{-x}$;
   3. $f(x) = 2\sin x$;
   4. $f(x) = e^x\cos 2x$.

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\frac{x}{2}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2, \; y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение
   1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;
   2. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^3$;
   3. $(4x+3)^2 y'' + (4x+3)y' - 16y = 0$;
   4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Контрольная работа №3
Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}. \qquad 2)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$3)\ \begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}. \qquad 4)\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}.$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \dfrac{1}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{matrix}$$

Для каждой системы найти фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - y'' + y' + x - 3y = 0 \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

5. По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти $A(x)$ линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, \ x > 0.$$

6. Выбрать метод и решить неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тестирование

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Типовые задания тестирования

Тест 1

Тема 1.Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ имеет вид

а) (?) $\frac{1}{y} = -\ln(1+x^2) + C$ **б) (!)** $-\frac{1}{y} = arctgx + C$

в) (?) $\frac{1}{y} = \ln(1+x^2) + C$ г) (?) $-\frac{1}{y} = arctg\,\frac{1}{x} + C$

2. Дано дифференциальное уравнение $xy' - 3y = 0$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = 3x^2$ б) (?) $y = -x^3$ **в) (!)** $y = x^3$ г) (?) $y = 3$

3. Дано дифференциальное уравнение $y' = -tgx$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = \cos x$ **б) (!)** $y = \ln\cos x$ в) (?) $y = -\ln\cos x$ г) (?) $y = \sin x$

4. Частное решение дифференциального уравнения $(x^2-1)\cdot y' = 2xy$ при $y(2) = 6$ имеет вид

а) (?) $y = \ln|x^2-1| - \ln 3 + 6$ б) (?) $y = x^2 + 2$ **в) (!)** $y = 2(x^2-1)$ г) (?) $y = \frac{x^2+8}{2}$

5. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$, удовлетворяющее условию y(2)=3, тогда y(1) равно....

(!) 2

6. Из данных дифференциальных уравнений уравнениями Бернулли являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} + y + 7 = 0$ **б) (!)** $x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$ в) (!) $3\frac{dy}{dx} - 2y = x^3y^{-2}$ г) (?) $y\frac{dy}{dx} + x^3 = 0$

7. Из данных дифференциальных уравнений однородными дифференциальным уравнениями первого порядка являются

а)(?) $y - x\frac{dy}{dx} = 1 + x^2\frac{dy}{dx}$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$

в) (!) $y = x\frac{dy}{dx} - xe^{\frac{y}{x}}$ г) (?) $x\frac{dy}{dx} - xe^y + 2 = 0$

8. Из данных дифференциальных уравнений линейными уравнениями первого порядка являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -y^2$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$ **в) (!)** $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$ г) (?) $\frac{dy}{dx} = \cos(y-x)$

9. Уравнение $y' + xy = x^2$ является...

а) (?) однородным дифференциальным уравнением
б) (?) уравнением с разделяющимися переменными
в) (?) уравнением Бернулли
г) (!) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1 порядка

10. Уравнение $y' - 3xy = (x+1)y^2$ является

а) (!) дифференциальным уравнением первого порядка разделяющимися переменными
б) (?) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами
в) (?) дифференциальным уравнением Бернулли
г) (?) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

11. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = -\frac{y}{ctgx}$, удовлетворяющее условию y($\frac{\pi}{3}$)=-1, тогда y($\frac{2\pi}{3}$) равно?

а) (!)1 б) (?) 2 в) (?) -1 г) (?) -2

12. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = \frac{y+1}{x+1}$, удовлетворяющее условию y(0)= 1, тогда y(1) равно?

а) (!) 3 б) (?) 0 в) (?) 1 г) (?) -1

Тест 2

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка

1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями второго порядка являются:

а) (!) $y\frac{d^2y}{dx^2} + 9y\frac{dy}{dx} + xy = 0$ б) (?) $y^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$

в) (!) $xy'' + yy' - 2xy^2 = 8x$ г) (?) $x^2\frac{dy}{dx} - 5y\frac{dy}{dx} - 3x^2y = 4y^2$

2. Порядок дифференциального уравнения $3y''' - y' = x^5$ равен
а) (?) 5 б) (?) 1 в) (?) 2 **г) (!) 3**
3. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 3x - 2$ имеет вид

а) (?) $y = x^4 - x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

в) (?): $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C$ **г) (!)** $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 12x + 8$ имеет вид

а) (!) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ г) (?) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C_3$

5.Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 2x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **г) (!)** $y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

6. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 4x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = \frac{1}{64}\cos 4x + C$

в) (?) $y = -\frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ **г) (!)** $y = \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

7. Порядок дифференциального уравнения $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$ равен

а) (?) 1 **б) (!) 2** в) (?) 3 г) (?) 4

8. Порядок дифференциального уравнения $x(y')^2 y'' = (y')^2 + \frac{1}{3}x^4$ равен

а) (?) 4 б) (?) 3 в) (!) 2 **г) (?) 1**

9. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 64y = 0$.

а) (!) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$ б) (?) $\{e^{8x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{8x}; e^{-8x}\}$ г) (?) $\{e^{-8x}; 1\}$

10. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 81y = 0$.

а) (!) $\{\sin 9x; \cos 9x$ б) (?) $\{e^{9x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{9x}; e^{-9x}\}$ г) (?) $\{e^{-9x}; 1\}$

11. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 100y = 0$.

а) (!) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$ б) (?) $\{e^{10x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{10x}; e^{-10x}\}$ г) (?) $\{e^{-10x}; 1\}$

12. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 6y' + 13y = 0$.

а) (!) $\{e^{-3x}\cos 2x; e^{-3x}\sin 2x\}$ б) (?) $\{\sin 2x; \cos 2x\}$

в) (?) $\{e^{-3x}; e^{2x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

13. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 12y' + 52y = 0$.

а) (!) $\{e^{-6x}\cos 4x; e^{-6x}\sin 4x\}$ б) (?) $\{\sin 4x; \cos 4x\}$

в) (?) $\{e^{-6x}; e^{4x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных.

14. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 18y' + 117y = 0$.

а) (!) $\{e^{-9x}\cos 6x; e^{-9x}\sin 6x\}$ б) (?) $\{\sin 6x; \cos 6x\}$

в) (?) $\{e^{-9x}; e^{6x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

15. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 24y' + 208y = 0$.
а) (!) $\{e^{-12x}\cos 8x; e^{-12x}\sin 8x\}$ б) (?) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$
в) (?) $\{e^{-12x}; e^{8x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

16. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 30y' + 325y = 0$.
а) (!) $\{e^{-15x}\cos 10x; e^{-15x}\sin 10x\}$ б) (?) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$
в) (?) $\{e^{-15x}; e^{10x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

17. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 36y' + 468y = 0$.
а) (!) $\{e^{-18x}\cos 12x; e^{-18x}\sin 12x\}$ б) (?) $\{\sin 12x; \cos 12x\}$
в) (?) $\{e^{-18x}; e^{12x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

18. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 42y' + 637y = 0$.
а) (!) $\{e^{-21x}\cos 14x; e^{-21x}\sin 14x\}$ б) (?) $\{\sin 14x; \cos 14x\}$
в) (?) $\{e^{-21x}; e^{14x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

Тест 3.
Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 16y\\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -4e^{-3t}\\ y = e^{-3t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0\\ y = e^{-3t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = -4e^{-3t}\\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{5t}\\ y = e^{-3t}\end{cases}$

2. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 16y\\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = 4e^{5t}\\ y = e^{5t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0\\ y = e^{5t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = 4e^{5t}\\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{-3t}\\ y = e^{5t}\end{cases}$

3. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 25y\\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -5e^{-4t}\\ y = e^{-4t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0\\ y = e^{-4t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = -5e^{-4t}\\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{6t}\\ y = e^{-4t}\end{cases}$

4. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 25y\\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = 5e^{6t}\\ y = e^{6t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0\\ y = e^{6t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = 6e^{6t}\\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{-4t}\\ y = e^{6t}\end{cases}$

5. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -6e^{-5t} \\ y = e^{-5t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{-5t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = -6e^{-5t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{7t} \\ y = e^{-5t}\end{cases}$

6. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = 6e^{7t} \\ y = e^{7t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{7t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = 6e^{7t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = e^{-5t} \\ y = e^{7t}\end{cases}$

7. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -e^{-t} \\ y = e^{-t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{-t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = e^{-t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = 2 \\ y = e^{3t}\end{cases}$

8. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -e^{3t} \\ y = e^{3t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{3t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = e^{3t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = -2 \\ y = e^{-t}\end{cases}$

9. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 3x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -e^{-2t} \\ y = e^{-2t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{-2t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = e^{-2t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = 3 \\ y = e^{4t}\end{cases}$

10. Решением системы $\begin{cases}\dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -3x + y\end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases}x = -e^{4t} \\ y = e^{4t}\end{cases}$ б) (?) $\begin{cases}x = 0 \\ y = e^{4t}\end{cases}$ в) (?) $\begin{cases}x = e^{4t} \\ y = 0\end{cases}$ г) (?) $\begin{cases}x = -3 \\ y = e^{-2t}\end{cases}$

11. Из следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases}\dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - 2y\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot{x} = tx + y \\ \dot{y} = x - 2y\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dot{x} = 3x + y + t \\ \dot{y} = x - 2y - t^2\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dot{x} = 3x + y^2 \\ \dot{y} = x - 2y\end{cases}$ д) $\begin{cases}\dot{x} = 3x + y^2 + t \\ \dot{y} = x^2 - 2y\end{cases}$

линейными являются:

1) (?) все пять.
2) (?) только а, г.
3) (?) только а, б.
4) (!) только а, б, в.
5) (?) только а, б, г.

12. Система уравнений $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} f^1(t,\bar{x}) \\ \vdots \\ f^n(t,\bar{x}) \end{pmatrix}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, если:

а) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $t, x^1,\dots,x^n$ в некоторой открытой области D, содержащей точку $(t_0, \bar{x}_0)$.

б) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $x^1,\dots,x^n$ до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $(t_0, \bar{x}_0)$.

в) $f^i(t,\bar{x})$ непрерывны во всём (n+1) – мерным пространстве.

Верны предложения:

1) (?) все три.
2) (?)только а.
3) (?)только б.
4) **(!)только а, б.**
5) (?) все три неверны.

13. Пусть $\begin{cases} x = c_1 t \\ y = c_1 - c_2 t - t \end{cases}$ есть общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y) \\ \dot{y} = f_2(t,x,y) \end{cases}$ (1)

Тогда:

а) $\dfrac{x}{t}$ и $x + y + t$ есть интеграл системы (1).

б) Любой интеграл $\psi(t,x,y)$ системы (1) можно представить в виде $\psi(t,x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{t}, x + y + t\right)$ при некоторой функции $\phi(\alpha_1,\alpha_2)$.

в) $x + y + t + 1$ есть интеграл системы (1).

г) $\dfrac{x - t}{t}$ есть интеграл системы (1).

Верны предложения:

1) **(!) все четыре.**
2) (?) только а, б, в.
3) (?) только а, в, г.
4) (?)только а, в.
5) (?) только а.
6) (?) не верны все четыре предложения.

14. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t,x^1,\dots,x^n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = f^n(t,x^1,\dots,x^n) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{и начальные условия} \qquad \begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ \dots\dots\dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (2)$$

а) Для существования и единственности решения задачи (1)-(2) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой открытой области D, содержащей точку $(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$, функции $f^k(t, x^1, \ldots, x^n)$ и $\frac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$, были непрерывны.

б) Если в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$ функции $f^k(t, x^1, \ldots, x^n)$ и $\frac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны, то решения задачи (1)-(2) существует и единственно.

в) Из существования и единственности решения задачи (1)-(2) следует непрерывность функций $f^k(t, x^1, \ldots, x^n)$ и $\frac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$ в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

Верны предложения:
1) (?)все три.
2) (?) только а, б.
3) (?)только а, в.
4) (?)только а.
5) **(!)только б.**
6) (?)только в.

15. $\lambda = 2$ есть трёхкратное собственное значение матрицы коэффициентов линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Соответствующие ему решения системы, следует искать в виде:

1) (?) $\begin{cases} x_1 = (a_1 t + b_1)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t + b_n)e^{2t} \end{cases}$.   **2) (!)** $\begin{cases} x_1 = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t^2 + b_n t + c_n)e^{2t} \end{cases}$.

3)(?) $\begin{cases} x_1 = (a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t^3 + b_n t^2 + c_n t + d_n)e^{2t} \end{cases}$. 4)(?) $\begin{cases} x_1 = a_1 t^3 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n t e^{2t} \end{cases}$. 5) (?) $\begin{cases} x_1 = t^2 a_1 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = t^2 a_n e^{2t} \end{cases}$

(a_k, b_k, c_k, d_k - неопределенные коэффициенты, $k = 1, \ldots, n$.)

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка

Типовые задания тестирования

Тест 1

Тема 1.Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ имеет вид

а) (?) $\frac{1}{y} = -\ln(1+x^2) + C$ **б) (!)** $-\frac{1}{y} = arctgx + C$

в) (?) $\frac{1}{y} = \ln(1+x^2) + C$ г) (?) $-\frac{1}{y} = arctg\,\frac{1}{x} + C$

2. Дано дифференциальное уравнение $xy' - 3y = 0$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = 3x^2$ б) (?) $y = -x^3$ **в) (!)** $y = x^3$ г) (?) $y = 3$

3. Дано дифференциальное уравнение $y' = -tgx$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = \cos x$ **б) (!)** $y = \ln\cos x$ в) (?) $y = -\ln\cos x$ г) (?) $y = \sin x$

4. Частное решение дифференциального уравнения $(x^2 - 1)\cdot y' = 2xy$ при $y(2) = 6$ имеет вид

а) (?) $y = \ln|x^2 - 1| - \ln 3 + 6$ б) (?) $y = x^2 + 2$ **в) (!)** $y = 2(x^2 - 1)$ г) (?) $y = \frac{x^2+8}{2}$

5. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$, удовлетворяющее условию y(2)=3, тогда y(1) равно....

(!) 2

6. Из данных дифференциальных уравнений уравнениями Бернулли являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} + y + 7 = 0$ **б) (!)** $x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$ в) (!) $3\frac{dy}{dx} - 2y = x^3y^{-2}$ г) (?) $y\frac{dy}{dx} + x^3 = 0$

7. Из данных дифференциальных уравнений однородными дифференциальным уравнениями первого порядка являются

а)(?) $y - x\frac{dy}{dx} = 1 + x^2\frac{dy}{dx}$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$

в) (!) $y = x\frac{dy}{dx} - xe^{\frac{z}{x}}$ г) (?) $x\frac{dy}{dx} - xe^y + 2 = 0$

8. Из данных дифференциальных уравнений линейными уравнениями первого порядка являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -y^2$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$ **в) (!)** $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$ г) (?) $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$

9. Уравнение $y' + xy = x^2$ является...

а) (?) однородным дифференциальным уравнением
б) (?) уравнением с разделяющимися переменными
в) (?) уравнением Бернулли
г) (!) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1 порядка

10. Уравнение $y' - 3xy = (x+1)y^2$ является

а) (!) дифференциальным уравнением первого порядка разделяющимися переменными
б) (?) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами
в) (?) дифференциальным уравнением Бернулли
г) (?) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

11. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = -\frac{y}{ctgx}$, удовлетворяющее условию y($\frac{\pi}{3}$)=-1, тогда y($\frac{2\pi}{3}$) равно?

а) (!)1 б) (?) 2 в) (?) -1 г) (?) -2

12. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = \frac{y+1}{x+1}$, удовлетворяющее условию y(0)= 1, тогда y(1) равно?

а) (!) 3 б) (?) 0 в) (?) 1 г) (?) -1

Тест 2

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка

1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями второго порядка являются:

а) (!) $y\frac{d^2y}{dx^2} + 9y\frac{dy}{dx} + xy = 0$ б) (?) $y^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$

в) (!) $xy'' + yy' - 2xy^2 = 8x$ г) (?) $x^2\frac{dy}{dx} - 5y\frac{dy}{dx} - 3x^2y = 4y^2$

2. Порядок дифференциального уравнения $3y''' - y' = x^5$ равен
а) (?) 5 б) (?) 1 в) (?) 2 **г) (!) 3**
3. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 3x - 2$ имеет вид

а) (?) $y = x^4 - x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

в) (?): $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C$ **г) (!)** $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 12x + 8$ имеет вид

а) (!) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ г) (?) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C_3$

5.Общее решение дифференциального уравнения $y''' = sin2x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **г) (!)** $y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

6. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = sin4x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = \frac{1}{64}\cos 4x + C$

в) (?) $y = -\frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ **г) (!)** $y = \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

7. Порядок дифференциального уравнения $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$ равен

а) (?) 1 **б) (!) 2** в) (?) 3 г) (?) 4

8. Порядок дифференциального уравнения $x(y')^2 y'' = (y')^2 + \frac{1}{3}x^4$ равен

а) (?) 4 б) (?) 3 в) (!) 2 **г) (?) 1**

9. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 64y = 0$.

а) (!) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$ б) (?) $\{e^{8x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{8x}; e^{-8x}\}$ г) (?) $\{e^{-8x}; 1\}$

10. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 81y = 0$.

а) (!) $\{\sin 9x; \cos 9x$ б) (?) $\{e^{9x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{9x}; e^{-9x}\}$ г) (?) $\{e^{-9x}; 1\}$

11. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 100y = 0$.

а) (!) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$ б) (?) $\{e^{10x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{10x}; e^{-10x}\}$ г) (?) $\{e^{-10x}; 1\}$

12. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 6y' + 13y = 0$.

а) (!) $\{e^{-3x}\cos 2x; e^{-3x}\sin 2x\}$ б) (?) $\{\sin 2x; \cos 2x\}$

в) (?) $\{e^{-3x}; e^{2x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

13. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 12y' + 52y = 0$.

а) (!) $\{e^{-6x}\cos 4x; e^{-6x}\sin 4x\}$ б) (?) $\{\sin 4x; \cos 4x\}$

в) (?) $\{e^{-6x}; e^{4x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных.

14. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 18y' + 117y = 0$.

а) (!) $\{e^{-9x}\cos 6x; e^{-9x}\sin 6x\}$ б) (?) $\{\sin 6x; \cos 6x\}$

в) (?) $\{e^{-9x}; e^{6x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

15. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 24y' + 208y = 0$.
   а) (!) $\{e^{-12x}\cos 8x; e^{-12x}\sin 8x\}$ б) (?) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$
   в) (?) $\{e^{-12x}; e^{8x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

16. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 30y' + 325y = 0$.
   а) (!) $\{e^{-15x}\cos 10x; e^{-15x}\sin 10x\}$ б) (?) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$
   в) (?) $\{e^{-15x}; e^{10x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

17. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 36y' + 468y = 0$.
   а) (!) $\{e^{-18x}\cos 12x; e^{-18x}\sin 12x\}$ б) (?) $\{\sin 12x; \cos 12x\}$
   в) (?) $\{e^{-18x}; e^{12x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

18. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 42y' + 637y = 0$.
   а) (!) $\{e^{-21x}\cos 14x; e^{-21x}\sin 14x\}$ б) (?) $\{\sin 14x; \cos 14x\}$
   в) (?) $\{e^{-21x}; e^{14x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

Тест 3.

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 16y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -4e^{-3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-3t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -4e^{-3t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$

2. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 16y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 4e^{5t} \\ y = e^{5t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{5t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 4e^{5t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{5t} \end{cases}$

3. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 25y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -5e^{-4t} \\ y = e^{-4t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-4t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -5e^{-4t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{6t} \\ y = e^{-4t} \end{cases}$

4. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 25y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 5e^{6t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{6t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 6e^{6t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-4t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$

5. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -6e^{-5t} \\ y = e^{-5t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-5t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -6e^{-5t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{7t} \\ y = e^{-5t} \end{cases}$

6. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 6e^{7t} \\ y = e^{7t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{7t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 6e^{7t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-5t} \\ y = e^{7t} \end{cases}$

7. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{-t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = 2 \\ y = e^{3t} \end{cases}$

8. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{3t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = -2 \\ y = e^{-t} \end{cases}$

9. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{-2t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = 3 \\ y = e^{4t} \end{cases}$

10. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -3x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{4t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = -3 \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

11. Из следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = tx + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + t \\ \dot{y} = x - 2y - t^2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y^2 \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y^2 + t \\ \dot{y} = x^2 - 2y \end{cases}$

линейными являются:

1) (?) все пять.
2) (?) только а, г.
3) (?) только а, б.
4) (!) только а, б, в.
5) (?) только а, б, г.

12. Система уравнений $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} f^1(t,\bar{x}) \\ \vdots \\ f^n(t,\bar{x}) \end{pmatrix}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, если:

а) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $t, x^1,\dots,x^n$ в некоторой открытой области D, содержащей точку $(t_0, \bar{x}_0)$.

б) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $x^1,\dots,x^n$ до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $(t_0, \bar{x}_0)$.

в) $f^i(t,\bar{x})$ непрерывны во всём (n+1)– мерным пространстве.

Верны предложения:

1) (?) все три.
2) (?)только а.
3) (?)только б.
4) **(!)только а, б.**
5) (?) все три неверны.

13. Пусть $\begin{cases} \dot{x} = c_1 t \\ \dot{y} = c_1 - c_2 t - t \end{cases}$ есть общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y) \\ \dot{y} = f_2(t,x,y) \end{cases}$ (1)

Тогда:

а) $\frac{x}{t}$ и $x + y + t$ есть интеграл системы (1).

б) Любой интеграл $\psi(t,x,y)$ системы (1) можно представить в виде $\psi(t,x,y) = \phi\left(\frac{x}{t}, x + y + t\right)$ при некоторой функции $\phi(\alpha_1, \alpha_2)$.

в) $x + y + t + 1$ есть интеграл системы (1).

г) $\frac{x-t}{t}$ есть интеграл системы (1).

Верны предложения:

1) **(!) все четыре.**
2) (?) только а, б, в.
3) (?) только а, в, г.
4) (?)только а, в.
5) (?) только а.
6) (?) не верны все четыре предложения.

14. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t,x^1,\dots,x^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^n = f^n(t,x^1,\dots,x^n) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{и начальные условия} \qquad \begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ \cdots\cdots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (2)$$

а) Для существования и единственности решения задачи (1)-(2) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой открытой области D, содержащей точку $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, функции $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$, были непрерывны.

б) Если в некоторой окрестности точки $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ функции $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны, то решения задачи (1)-(2) существует и единственно.

в) Из существования и единственности решения задачи (1)-(2) следует непрерывность функций $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$ в некоторой окрестности точки $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$.

Верны предложения:

1) (?)все три.
2) (?) только а, б.
3) (?)только а, в.
4) (?)только а.
5) **(!)только б.**
6) (?)только в.

15. $\lambda = 2$ есть трёхкратное собственное значение матрицы коэффициентов линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Соответствующие ему решения системы, следует искать в виде:

1) (?) $\begin{cases} x_1 = \left(a_1 t + b_1\right)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \left(a_n t + b_n\right)e^{2t} \end{cases}$. **2) (!)** $\begin{cases} x_1 = \left(a_1 t^2 + b_1 t + c_1\right)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \left(a_n t^2 + b_n t + c_n\right)e^{2t} \end{cases}$.

3)(?) $\begin{cases} x_1 = \left(a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1\right)e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \left(a_n t^3 + b_n t^2 + c_n t + d_n\right)e^{2t} \end{cases}$. 4)(?) $\begin{cases} x_1 = a_1 t^3 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n t e^{2t} \end{cases}$. 5) (?) $\begin{cases} x_1 = t^2 a_1 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = t^2 a_n e^{2t} \end{cases}$

(a_k, b_k, c_k, d_k - неопределенные коэффициенты, $k = 1, \ldots, n$.)

Тема 3. Линейные системы дифференциальных уравнений

Типовые задания тестирования

Тест 1

Тема 1.Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ имеет вид

а) (?) $\frac{1}{y} = -\ln(1+x^2) + C$ **б) (!)** $-\frac{1}{y} = arctgx + C$

в) (?) $\frac{1}{y} = \ln(1+x^2) + C$ г) (?) $-\frac{1}{y} = arctg\,\frac{1}{x} + C$

2. Дано дифференциальное уравнение $xy' - 3y = 0$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = 3x^2$ б) (?) $y = -x^3$ **в) (!)** $y = x^3$ г) (?) $y = 3$

3. Дано дифференциальное уравнение $y' = -tgx$. Тогда его решением является функция

а) (?) $y = \cos x$ **б) (!)** $y = \ln\cos x$ в) (?) $y = -\ln\cos x$ г) (?) $y = \sin x$

4. Частное решение дифференциального уравнения $(x^2 - 1)\cdot y' = 2xy$ при $y(2) = 6$ имеет вид

а) (?) $y = \ln|x^2 - 1| - \ln 3 + 6$ б) (?) $y = x^2 + 2$ **в) (!)** $y = 2(x^2 - 1)$ г) (?) $y = \frac{x^2+8}{2}$

5. Если *y(x)* – решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$, удовлетворяющее условию y(2)=3, тогда y(1) равно....

(!) 2

6. Из данных дифференциальных уравнений уравнениями Бернулли являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} + y + 7 = 0$ **б) (!)** $x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$ в) (!) $3\frac{dy}{dx} - 2y = x^3y^{-2}$ г) (?) $y\frac{dy}{dx} + x^3 = 0$

7. Из данных дифференциальных уравнений однородными дифференциальным уравнениями первого порядка являются

а)(?) $y - x\frac{dy}{dx} = 1 + x^2\frac{dy}{dx}$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

в) (!) $y = x\frac{dy}{dx} - xe^{\frac{y}{x}}$ г) (?) $x\frac{dy}{dx} - xe^{y} + 2 = 0$

8. Из данных дифференциальных уравнений линейными уравнениями первого порядка являются

а) (?) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -y^2$ б) (!) $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$ **в) (!)** $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$ г) (?) $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$

9. Уравнение $y' + xy = x^2$ является...

а) (?) однородным дифференциальным уравнением
б) (?) уравнением с разделяющимися переменными
в) (?) уравнением Бернулли
г) (!) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1 порядка

10. Уравнение $y' - 3xy = (x+1)y^2$ является

а) (!) дифференциальным уравнением первого порядка разделяющимися переменными
б) (?) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами
в) (?) дифференциальным уравнением Бернулли
г) (?) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

11. Если $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\dfrac{y}{ctgx}$, удовлетворяющее условию $y(\dfrac{\pi}{3})=-1$, тогда $y(\dfrac{2\pi}{3})$ равно?

а) (!)1 б) (?) 2 в) (?) -1 г) (?) -2

12. Если $y(x)$ – решение уравнения $y' = \dfrac{y+1}{x+1}$, удовлетворяющее условию $y(0)= 1$, тогда $y(1)$ равно?

а) (!) 3 б) (?) 0 в) (?) 1 г) (?) -1

Тест 2

Тема 2. Дифференциальные уравнения высшего порядка

1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями второго порядка являются:

а) (!) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y\dfrac{dy}{dx}+xy=0$ б) (?) $y^2\dfrac{dy}{dx}+x\dfrac{dy}{dx}+x^2y=0$

в) (!) $xy''+yy'-2xy^2=8x$ г) (?) $x^2\dfrac{dy}{dx}-5y\dfrac{dy}{dx}-3x^2y=4y^2$

2. Порядок дифференциального уравнения $3y''' - y' = x^5$ равен
а) (?) 5 б) (?) 1 в) (?) 2 **г) (!) 3**
3. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 3x - 2$ имеет вид

а) (?) $y=x^4-x^3+C_1x^2+C_2x+C_3$ б) (?) $y=\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$

в) (?): $y=\dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+C$ **г) (!)** $y=\dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 12x + 8$ имеет вид

а) (!) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ г) (?) $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C_3$

5.Общее решение дифференциального уравнения $y''' = sin2x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

в) (?) $y = \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **г) (!)** $y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

6. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = sin4x$ имеет вид

а) (?) $y = \cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ б) (?) $y = \frac{1}{64}\cos 4x + C$

в) (?) $y = -\frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ **г) (!)** $y = \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

7. Порядок дифференциального уравнения $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$ равен

а) (?) 1 **б) (!) 2** в) (?) 3 г) (?) 4

8. Порядок дифференциального уравнения $x(y')^2 y'' = (y')^2 + \frac{1}{3}x^4$ равен

а) (?) 4 б) (?) 3 в) (!) 2 **г) (?) 1**

9. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 64y = 0$.

а) (!) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$ б) (?) $\{e^{8x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{8x}; e^{-8x}\}$ г) (?) $\{e^{-8x}; 1\}$

10. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 81y = 0$.

а) (!) $\{\sin 9x; \cos 9x$ б) (?) $\{e^{9x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{9x}; e^{-9x}\}$ г) (?) $\{e^{-9x}; 1\}$

11. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 100y = 0$.

а) (!) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$ б) (?) $\{e^{10x}; 1\}$ в) (?) $\{e^{10x}; e^{-10x}\}$ г) (?) $\{e^{-10x}; 1\}$

12. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 6y' + 13y = 0$.

а) (!) $\{e^{-3x}\cos 2x; e^{-3x}\sin 2x\}$ б) (?) $\{\sin 2x; \cos 2x\}$

в) (?) $\{e^{-3x}; e^{2x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

13. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 12y' + 52y = 0$.

а) (!) $\{e^{-6x}\cos 4x; e^{-6x}\sin 4x\}$ б) (?) $\{\sin 4x; \cos 4x\}$

в) (?) $\{e^{-6x}; e^{4x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных.

14. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y' + 18y' + 117y = 0$.

а) (!) $\{e^{-9x}\cos 6x; e^{-9x}\sin 6x\}$ б) (?) $\{\sin 6x; \cos 6x\}$

в) (?) $\{e^{-9x}; e^{6x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

15. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 24y' + 208y = 0$.
а) (!) $\{e^{-12x}\cos 8x; e^{-12x}\sin 8x\}$ б) (?) $\{\sin 8x; \cos 8x\}$
в) (?) $\{e^{-12x}; e^{8x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

16. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 30y' + 325y = 0$.
а) (!) $\{e^{-15x}\cos 10x; e^{-15x}\sin 10x\}$ б) (?) $\{\sin 10x; \cos 10x\}$
в) (?) $\{e^{-15x}; e^{10x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

17. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 36y' + 468y = 0$.
а) (!) $\{e^{-18x}\cos 12x; e^{-18x}\sin 12x\}$ б) (?) $\{\sin 12x; \cos 12x\}$
в) (?) $\{e^{-18x}; e^{12x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

18. Укажите фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 42y' + 637y = 0$.
а) (!) $\{e^{-21x}\cos 14x; e^{-21x}\sin 14x\}$ б) (?) $\{\sin 14x; \cos 14x\}$
в) (?) $\{e^{-21x}; e^{14x}\}$ г) (?) другая пара функций, отличная от вышеуказанных

Тест 3.
Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 16y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -4e^{-3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-3t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -4e^{-3t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$

2. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 16y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 4e^{5t} \\ y = e^{5t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{5t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 4e^{5t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{5t} \end{cases}$

3. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 25y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -5e^{-4t} \\ y = e^{-4t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-4t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -5e^{-4t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{6t} \\ y = e^{-4t} \end{cases}$

4. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 25y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 5e^{6t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{6t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 6e^{6t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-4t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$

5. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -6e^{-5t} \\ y = e^{-5t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-5t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = -6e^{-5t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{7t} \\ y = e^{-5t} \end{cases}$

6. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 36y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = 6e^{7t} \\ y = e^{7t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{7t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = 6e^{7t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = e^{-5t} \\ y = e^{7t} \end{cases}$

7. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{-t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = 2 \\ y = e^{3t} \end{cases}$

8. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{3t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = -2 \\ y = e^{-t} \end{cases}$

9. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{-2t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = 3 \\ y = e^{4t} \end{cases}$

10. Решением системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -3x + y \end{cases}$, является:

а) (!) $\begin{cases} x = -e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$ б) (?) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{4t} \end{cases}$ в) (?) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = 0 \end{cases}$ г) (?) $\begin{cases} x = -3 \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

11. Из следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = tx + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + t \\ \dot{y} = x - 2y - t^2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y^2 \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y^2 + t \\ \dot{y} = x^2 - 2y \end{cases}$

линейными являются:

1) (?) все пять.
2) (?) только а, г.
3) (?) только а, б.
4) (!) только а, б, в.
5) (?) только а, б, г.

12. Система уравнений $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} f^1(t,\bar{x}) \\ \vdots \\ f^n(t,\bar{x}) \end{pmatrix}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, если:

а) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $t, x^1,\dots,x^n$ в некоторой открытой области D, содержащей точку $(t_0, \bar{x}_0)$.

б) $f^i(t,\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$, непрерывны вместе с частными производными по $x^1,\dots,x^n$ до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $(t_0, \bar{x}_0)$.

в) $f^i(t,\bar{x})$ непрерывны во всём (n+1)– мерным пространстве.

Верны предложения:

1) (?) все три.
2) (?)только а.
3) (?)только б.
4) **(!)только а, б.**
5) (?) все три неверны.

13. Пусть $\begin{cases} x = c_1 t \\ y = c_1 - c_2 t - t \end{cases}$ есть общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y) \\ \dot{y} = f_2(t,x,y) \end{cases}$ (1)

Тогда:

а) $\dfrac{x}{t}$ и $x + y + t$ есть интеграл системы (1).

б) Любой интеграл $\psi(t,x,y)$ системы (1) можно представить в виде $\psi(t,x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{t}, x + y + t\right)$ при некоторой функции $\phi(\alpha_1,\alpha_2)$.

в) $x + y + t + 1$ есть интеграл системы (1).

г) $\dfrac{x - t}{t}$ есть интеграл системы (1).

Верны предложения:

1) **(!) все четыре.**
2) (?) только а, б, в.
3) (?) только а, в, г.
4) (?)только а, в.
5) (?) только а.
6) (?) не верны все четыре предложения.

14. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t,x^1,\dots,x^n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = f^n(t,x^1,\dots,x^n) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{и начальные условия} \qquad \begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ \dots\dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (2)$$

а) Для существования и единственности решения задачи (1)-(2) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой открытой области D, содержащей точку $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, функции $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$, были непрерывны.

б) Если в некоторой окрестности точки $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ функции $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны, то решения задачи (1)-(2) существует и единственно.

в) Из существования и единственности решения задачи (1)-(2) следует непрерывность функций $f^k\left(t, x^1, \ldots, x^n\right)$ и $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, n$ в некоторой окрестности точки $\left(t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$.

Верны предложения:

1) (?)все три.
2) (?) только а, б.
3) (?)только а, в.
4) (?)только а.
5) **(!)только б.**
6) (?)только в.

15. $\lambda = 2$ есть трёхкратное собственное значение матрицы коэффициентов линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Соответствующие ему решения системы, следует искать в виде:

1) (?) $\begin{cases} x_1 = (a_1 t + b_1) e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t + b_n) e^{2t} \end{cases}$. **2) (!)** $\begin{cases} x_1 = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t^2 + b_n t + c_n) e^{2t} \end{cases}$.

3)(?) $\begin{cases} x_1 = (a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1) e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a_n t^3 + b_n t^2 + c_n t + d_n) e^{2t} \end{cases}$. 4)(?) $\begin{cases} x_1 = a_1 t^3 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n t e^{2t} \end{cases}$. 5) (?) $\begin{cases} x_1 = t^2 a_1 e^{2t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = t^2 a_n e^{2t} \end{cases}$

(a_k, b_k, c_k, d_k - неопределенные коэффициенты, $k = 1, \ldots, n$.)

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена

Типовые вопросы экзамена (ОПК-2)

Вопросы экзамена

Примеры вопросов по дисциплине « Дифференциальные уравнения» для экзамена в 3 семестре.

1. Основные понятия и определения (дифференциальное уравнение, решение ОДУ, нормальная система ОДУ и её решение). Примеры задач, приводящих к ОДУ. Геометрическая интерпретация решения ОДУ. Фазовое пространство, интегральная кривая, поле направлений.
2. Задача Коши: определение. Теорема Коши существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, доказательство.
3. Оценка разности решений двух уравнений. Непрерывная зависимость решения от начальных условий, правой части и параметра.
4. Определение общего решения, общего интеграла, общего интеграла ОДУ первого порядка в области Д. Пример.
5. Изоклины, метод изоклин решения ОДУ.
6. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и квазиоднородные уравнения. Пример однородного уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.

7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли. Метод Лагранжа. Примеры. Уравнения Бернулли и Риккати.
8. Особые точки, особые решения ОДУ первого порядка. Примеры.
9. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро. Теорема Коши: формулировка.
10. Задача и теорема Коши для нормальной системы ОДУ. Частное и общее решение системы ОДУ.
11. Оценка разности двух решений нормальной системы ОДУ. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и параметра.
12. ОДУ n-го порядка. Задача Коши, теорема Коши. Общее и частное решение уравнения.
13. Случаи понижения порядка для уравнения n-го порядка. Примеры.
14. Линейные ДУ (на примере дифференциального уравнения 2-го порядка). Характерные свойства линейного уравнения с постоянными коэффициентами для однородного и неоднородного уравнений (вид решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения).
15. Общие свойства линейного уравнения n-го порядка.
16. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков, однородные и неоднородные. Сведение к линейной системе. Определение линейно зависимой системы функций. Вронскиан и фундаментальная система решений.
17. Теорема о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка.
18. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай различных корней. Пример.
20. Формула сдвига. Случай кратных корней характеристического уравнения.
21. Структура частного решения уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Примеры.
22. Метод Лагранжа решения неоднородного ОДУ.
23. Общие свойства линейного уравнения n-го порядка (нормальной системы линейных ОДУ).
24. Определение линейно независимости системы вектор-функций. Определитель Вронского.
25. Фундаментальная система решений нормальной системы линейных ОДУ. Формула Остроградского-Лиувилля.
26. Теорема о структуре общего решения однородной системы с переменными коэффициентами. Теорема о структуре решения неоднородной системы с переменными коэффициентами.
27. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы. Нахождение фундаментальной системы решений в случае различных корней характеристического уравнения. Общий случай простых корней. Фундаментальная система решений в случае кратных корней.
28. Метод Лагранжа решения неоднородной системы ОДУ.

Типовые задания для экзамена (ОПК-2)

Типовые задания для экзамена

Решить уравнение: $xydx+(x+1)dy=0$.

Решить уравнение: $(x^2-y^2)dy+2xydx=0$.

Решить уравнение методом вариации постоянных: $y''+y=1/\sin x$.

Решить уравнение: $y''+y'=4\sin x$.

Решить уравнение: $xy'-2y=2x^4$.

Решить уравнение: $y'y'''=2{y''}^2$.

Решить уравнение: $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$.

Решить уравнение: $y^{V}-2y^{IV}-16y'+32y=0$.

Решить уравнение: $(y-4xy^3)dx=(2x^2y^2+x)dy$.

Решить уравнение: $y''-3y'+2y=2^x$.

Решить уравнение: $xyy''-x{y'}^2=yy'$

Решить уравнение: 3y^'+y^2+2/x^2 =0.

Решить уравнение: x^2 yy"-5xyy'-x^2 〖y'〗^2=6y^2.

4.4. Шкала оценивания промежуточной аттестации

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«отлично» (85 - 100 баллов)	ОПК-2	Устанавливает связи между материалом из разных предметных областей, необходимых для решения поставленной задачи; анализирует и обобщает материал в рамках профессиональных задач. Умеет проводить понятийный и методологический анализ в каждой из предметных областей. Свободно владеет понятийной базой во всех профессионально значимых областях знаний.
«хорошо» (70 - 84 баллов)	ОПК-2	Хорошо понимает основные закономерности в соответствующих предметных областях, демонстрируя теоретическое и практическое мышление. Уверенно отличает предметные области и соответствующую им понятийную и методологическую базы. Хорошо знает базовые понятия основополагающих разделов математики и физики. Уверенно применяет методы для решения задач в соответствующих предметных областях. Демонстрирует хорошее знание классических методов исследования основных задач в соответствующих предметных областях
«удовлетворительно» (50 - 69 баллов)	ОПК-2	Осмысляет материал соответствующих дисциплин, проявляя абстрактное мышление. Умеет разграничивать понятия и методы, но не во всех предметных областях. Знаком с понятийным аппаратом, но не во всех предметных областях. Знаком с классическими методами исследования отдельных проблем математики и физики. Исследует классические задачи не допуская грубых ошибок. Допускает ошибки в профессиональной терминологии, знаком с основными изданиями в ключевых разделах математики.
«неудовлетворительно» (менее 50 баллов)	ОПК-2	Воспринимает материал базовых разделов математики. Выделяет отдельные понятия в соответствии с некоторыми предметными областями. Допускает грубые ошибки в базовых понятиях математики Плохо владеет методологией решения задач в предметных областях.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

5.1 Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся:

Приступая к изучению дисциплины, в первую очередь обучающимся необходимо ознакомиться содержанием рабочей программы дисциплины (РПД), которая определяет содержание, объем, а также порядок изучения и преподавания учебной дисциплины, ее раздела, части.

Для самостоятельной работы важное значение имеют разделы «Объем и содержание дисциплины», «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» и «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы».

В разделе «Объем и содержание дисциплины» указываются все разделы и темы изучаемой дисциплины, а также виды занятий и планируемый объем в академических часах.

В разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» указана рекомендуемая основная и дополнительная литература.

В разделе «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы» содержится перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, необходимых для освоения дисциплины.

5.2 Рекомендации обучающимся по работе с теоретическими материалами по дисциплине

При изучении и проработке теоретического материала необходимо:

- просмотреть еще раз презентацию лекции в системе MOODLe, повторить законспектированный на лекционном занятии материал и дополнить его с учетом рекомендованной дополнительной литературы;
- при самостоятельном изучении теоретической темы сделать конспект, используя рекомендованные в РПД источники, профессиональные базы данных и информационные справочные системы:
- ответить на вопросы для самостоятельной работы, по теме представленные в пункте 3.2 РПД.
- при подготовке к текущему контролю использовать материалы фонда оценочных средств (ФОС).

5.3 Рекомендации по работе с научной и учебной литературой

Работа с основной и дополнительной литературой является главной формой самостоятельной работы и необходима при подготовке к устному опросу на семинарских занятиях, к дебатам, тестированию, экзамену. Она включает проработку лекционного материала и рекомендованных источников и литературы по тематике лекций.

Конспект лекции должен содержать реферативную запись основных вопросов лекции, в том числе с опорой на размещенные в системе MOODLe презентаци, основных источников и литературы по темам, выводы по каждому вопросу. Конспект может быть выполнен в рамках распечатки выдачи презентаций лекций или в отдельной тетради по предмету. Он должен быть аккуратным, хорошо читаемым, не содержать не относящуюся к теме информацию или рисунки.

Конспекты научной литературы при самостоятельной подготовке к занятиям должны содержать ответы на каждый поставленный в теме вопрос, иметь ссылку на источник информации с обязательным указанием автора, названия и года издания используемой научной литературы. Конспект может быть опорным (содержать лишь основные ключевые позиции), но при этом позволяющим дать полный ответ по вопросу, может быть подробным. Объем конспекта определяется самим студентом.

В процессе работы с основной и дополнительной литературой студент может:

- делать записи по ходу чтения в виде простого или развернутого плана (создавать перечень основных вопросов, рассмотренных в источнике);
- составлять тезисы (цитирование наиболее важных мест статьи или монографии, короткое изложение основных мыслей автора);
- готовить аннотации (краткое обобщение основных вопросов работы);
- создавать конспекты (развернутые тезисы).

5.4. Рекомендации по подготовке к отдельным заданиям текущего контроля

Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.

Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:

- правильность ответа по содержанию;
- полнота и глубина ответа;
- сознательность ответа;
- логика изложения материала;
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи;
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе;
- использование дополнительного материала;
- рациональность использования времени, отведенного на задание.

Устный опрос может сопровождаться презентацией, которая подготавливается по одному из вопросов практического занятия. При выступлении с презентацией необходимо обращать внимание на такие моменты как:

- содержание презентации: актуальность темы, полнота ее раскрытия, смысловое содержание, соответствие заявленной темы содержанию, соответствие методическим требованиям (цели. ссылки на ресурсы. соответствие содержания и литературы), практическая направленность, соответствие содержания заявленной форме, адекватность использования технических средств учебным задачам, последовательность и логичность презентуемого материала;
- оформление презентации: объем (оптимальное количество), дизайн (читаемость, наличие и соответствие графики и анимации, звуковое оформление, структурирование информации, соответствие заявленным требованиям), оригинальность оформления, эстетика, использование возможности программной среды, соответствие стандартам оформления;
- личностные качества: ораторские способности. соблюдение регламента, эмоциональность, умение ответить на вопросы, систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам программы:
- содержание выступления: логичность изложения материала, раскрытие темы, доступность изложения, эффективность применения средств ИКТ, способы и условия достижения результативности и эффективности для выполнения задач своей профессиональной или учебной деятельности, доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои заключения, выводы.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1 Основная литература:

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие. - 3-е изд., стер.. - Москва: Наука, 1970. - 96 с.

2. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд.. - М., СПб.: Лаборатория Базовых Знаний, Невский Диалект, 2001. - 344 с.

3. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - 2023-02-12; Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 396 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: http://www.iprbookshop.ru/92055.html

4. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. - Изд. 3-е, доп.. - Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. - 400 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468247

6.2 Дополнительная литература:

1. Романко В. К. Курс разностных уравнений : учебное пособие. - Москва: Физматлит, 2012. - 200 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457685

2. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. - 3-е изд., испр.. - Москва: Наука, 1965. - 126 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222214

6.3 Методические разработки:

1. Булгаков А.И., Малютина Е.В., Панасенко Е.А., Плужникова Е.А., Филиппова О.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями : учеб. пособие. - Тамбов: [Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина], 2014. - 98 с.

2. Малютина Е.В., Плужникова Е.А., Филиппова О.В., Фомичева Ю.Г. Задачник-практикум по математической логике и дискретной математике : учеб. пособие. - Тамбов: [Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина], 2015. - 102 с.

3. Жуковская Т.В., Молоканова Е.А., Плужникова Е.А., Урусов А.И., Филиппова О.В. Высшая математика : учеб. пособие : в 3 ч.. - Тамбов: [Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина], 2014

6.4 Иные источники:

1. Сайт Тамбовского государственного университета http://tsutmb.ru - http://tsutmb.ru

2. Единое окно доступа к образовательным интернет-ресурсам Федерального портала «Российское образование» - http://window.edu.ru/catalog/?p_rubr=2.1.21%2F

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории и помещения для самостоятельной работы укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы укомплектованы компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Лицензионное программное обеспечение:

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition. 1500-2499 Node 1 year Educational Renewal Licence

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

7-Zip 9.20

Операционная система Microsoft Windows 10

Adobe Reader XI - Russian

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Scopus: база данных . – URL: https://www.scopus.com

2. Springer Open (ресурсы Springer открытого доступа): база данных. – URL: https://www.springeropen.com

3. Web of Science: политематическая реферативно-библиографическая и наукометрическая база данных . – URL: https://apps.webofknowledge.com

4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru. – URL: https://elibrary.ru

5. Электронный каталог Фундаментальной библиотеки ТГУ. – URL: http://biblio.tsutmb.ru/elektronnyij-katalog

Электронная информационно-образовательная среда

https://auth.tsutmb.ru/authorize?response_type=code&client_id=moodle&state=xyz

Взаимодействие преподавателя и студента в процессе обучения осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.